И. Р. ВЫСОЦКИЙ
И. В. ЯЩЕНКО

МАТЕМАТИКА

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

7/8/9 классы

Часть 1

Под редакцией
И. В. ЯЩЕНКО

И. Р. ВЫСОЦКИЙ
И. В. ЯЩЕНКО

МАТЕМАТИКА

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

7–9 классы

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник

В двух частях

Часть 1

Под редакцией И. В. Ященко

Допущено Министерством просвещения Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2023

Предисловие

Что такое статистика и как она связана с теорией вероятностей

Наука, которая занимается способами сбора, обработки и представления больших массивов данных, называется **статистикой**. Это название впервые использовал немецкий учёный Готфрид Ахенваль. Слово «статистика» происходит от латинского слова *status* — «состояние, положение вещей».

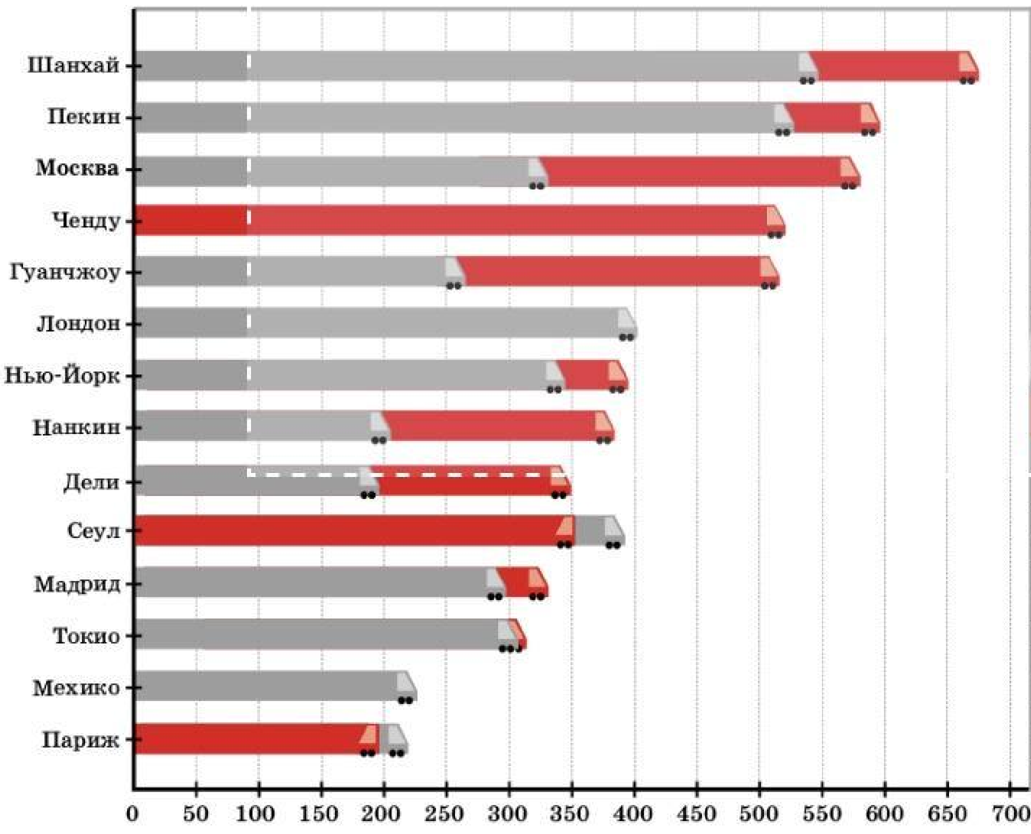
Нельзя управлять автомобилем, в котором приборы показывают неправду или вовсе не работают. Точно так же невозможно управлять государством, городом и даже школой, если нет достоверной статистической информации.

Статистика нужна не только для управления. Все люди сталкиваются с медицинским обслуживанием, пользуются услугами банков, транспортом, делают покупки в магазинах. В нашем мире, который стремительно становится цифровым, статистическое мышление даёт человеку преимущество перед тем, у кого статистический кругозор не развит. Ещё лучше, если статистическое мышление подкреплено знанием математики.

В России сбором и обработкой статистических данных занимаются Центральный банк Российской Федерации, Пенсионный фонд Российской Федерации, министерства и ведомства. План сбора статистических данных (Федеральный план статистических работ) разрабатывает Федеральная служба государственной статистики (Росстат). Официальная статистическая информация доступна каждому.

Самым масштабным статистическим исследованием является Всероссийская перепись населения, о которой вы наверняка слышали. Федеральная служба государственной статистики собирает и систематизирует не только сведения о численности

Диаграмма 1. **Десять крупнейших метрополитенов мира**



2015

Город	*Протяжённость линий, км*
Шанхай	548
Пекин	527
Лондон	402
Сеул	393
Нью-Йорк	337
Москва	328
Токио	310
Мадрид	296
Мехико	226
Париж	220

2022

Город	*Протяжённость линий, км*
Шанхай	676
Пекин	597
Москва	568
Ченду	519
Гуанчжоу	515
Лондон	402
Нью-Йорк	394
Нанкин	379
Дели	348
Сеул	343

населения, но и о его доходах и расходах, уровне образования, об экономике и транспорте, о медицинском обслуживании, о магазинах и кафе, о том, сколько мы расходуем воды и электроэнергии, бензина и газа, — обо всём, что нужно знать, чтобы планировать жизнь огромной страны. Очень важно знать, как ведётся строительство — как быстро растёт количество домов, какое жильё пользуется наибольшим спросом сейчас и какое будет нужно через несколько лет.

Важно не только собрать информацию. Нужно уметь сравнивать её с аналогичными данными о других странах. Ещё важнее наблюдать, как меняются показатели — плотность населения, занятость, доходы, как учатся школьники, как развивается транспорт. На диаграмме 1 видно, как за семь лет поменялся состав десяти крупнейших метрополитенов мира и как выросла протяжённость линий.

Величины, которые изучает статистика, изменчивы — подвержены случайным колебаниям. Меняются курсы валют, цены на нефть и газ, температура воздуха на улице. Даже в школьной жизни множество изменчивых величин. Например, количество школьников, присутствующих в классе, меняется день ото дня. Каждый день один и тот же школьник тратит на дорогу от дома до школы разное время — немного больше или немного меньше, чем накануне.

Чтобы стать настоящей наукой, правильно описывать, объяснять и прогнозировать изменчивые явления, статистика нуждается в помощи математики. Раздел математики, изучающий случайные явления, называется **теорией вероятностей**. Опираясь на математические законы вероятностей, специалисты-статистики могут не только собирать данные и выдвигать предположения, но и проверять их, а также делать достоверные выводы и полезные прогнозы.

Вы начинаете изучать статистику и теорию вероятностей. Вы увидите, как математика помогает понять многие сложные и изменчивые явления повседневной жизни. Вам пригодятся все математические знания: и то, что вы уже знаете, и то, что вам ещё только предстоит узнать на уроках алгебры и геометрии.

Условные обозначения

Важно

Вопросы

Справка, комментарий

Задачи

Определение

Используйте калькулятор

1 Параграф базового уровня

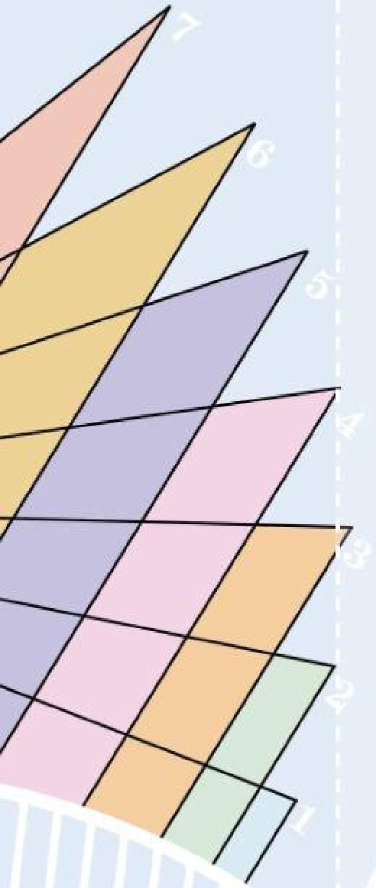
6* Параграф повышенного уровня

Таблицы для заполнения, представленные в задачах, можно скачать по QR-коду

Начало и окончание материала повышенной сложности

120 Задание повышенной сложности

I Представление данных



Чтобы упорядочивать большие массивы данных, используют таблицы. В таблице гораздо легче искать информацию, чем в обычном тексте, потому что в таблице каждое значение находится в своей ячейке, а однородные сведения сгруппированы в одной графе. Если данные подходящим образом помещены в таблицу, то их удобно сравнивать.
Для наглядного представления обычно используют графические средства, например диаграммы. В отличие от таблиц, диаграммы не передают значения точно, зато позволяют сравнивать величины на глаз. Вам знакомы столбиковые и круговые диаграммы. Кроме них существуют демографические диаграммы, лепестковые диаграммы и множество других.

1 Таблицы

2 Упорядочивание данных и поиск информации

3 Подсчёты и вычисления в таблицах

4 Столбиковые диаграммы

5 Круговые диаграммы

6* Возрастно-половые диаграммы

1 Таблицы

Таблица — простой и удобный способ упорядочить данные. С некоторыми таблицами вы уже знакомы с начальной школы. Это таблицы сложения и умножения, таблицы спряжения глаголов. Таблицами являются расписание уроков, страницы школьного дневника, оглавление учебника.

Государственные и коммерческие службы регулярно собирают обширные сведения об обществе и окружающей среде. Эти данные обычно публикуют в виде таблиц.

Рассмотрим примеры таблиц, научимся составлять их и извлекать из них информацию.

ПРИМЕР. В образовательном центре был сделан ремонт, и в начале учебного года руководство центра поручило сотруднице Елене собрать заявки на новую мебель от всех лабораторий и отделов. Елена принимает заявки по СМС и по электронной почте. В течение двух дней она получила несколько заявок.

Данные поступают в разное время, уточняются, меняются. Всё это трудно запомнить и неудобно хранить в разных местах. Нужно собрать все сведения в одну таблицу. Елена использует электронную таблицу. Она уже подсчитала и внесла в неё, сколько нужно рабочих столов (рис. 1).

При этом часть информации потеряна: в таблице мы не видим, сколько и какой мебели заказывали разные отделы. Но сейчас это не важно. Главное — собрать общий заказ. Таблицу можно расширить: указать цены и подсчитать общую сумму, которую придётся затратить на новую мебель.

Вопросы

1 Какая информация, нужная для приобретения и расстановки мебели, не вошла в таблицу на рисунке 1?

	A	B	C
1			
2		Наименование	Количество
3	1	Стол рабочий	11
4	2	Шкаф для одежды	
5	3	Стул	
6	4	Кресло	
7	5	Тумбочка с ящиками	
8	6	Книжный шкаф	
9	7	Настольная лампа	
10	8	Маленький круглый стол	
11	9	Зелёный диван	

Рисунок 1. **Заказ мебели**

2 Приведите примеры таблиц, которые вы видели на улицах, в торговых центрах, на вокзалах, автобусных станциях или в аэропортах.

Задачи

1 Перечертите таблицу из рисунка 1 в тетрадь и заполните её до конца.

2 Каждый день автобус делает три рейса от железнодорожной станции в посёлок — туда и обратно. Первый рейс отправляется от станции утром в 8 часов 32 минуты. На дорогу от станции до посёлка автобус тратит ровно 30 минут. Такое же время автобус тратит на обратный путь. На конечных остановках автобус ровно 10 минут ждёт пассажиров и отправляется обратно. Составьте расписание движения автобуса по образцу (табл. 1).

Таблица 1. **Расписание движения автобусов по маршруту «Ст. Беломошье — пос. Нагорное». Ежедневно с 25.04.2022**

Время отправления от конечного пункта	
Ст. Беломошье	**Пос. Нагорное**
8:32	

2 Упорядочивание данных и поиск информации

Чтобы легче разыскивать данные в таблицах, их упорядочивают по какому-то признаку. Иногда упорядочивание совершенно естественное. Например, одни и те же данные за разные годы обычно представляют **в хронологическом порядке** (упорядочивание по времени). Если данные разбросаны хаотично, пользоваться таблицей неудобно.

ПРИМЕР 1. В таблице 2 показано население городов-миллионеров в России в некоторые годы. Города упорядочены по алфавиту, а данные о числе жителей — хронологически.

Таблица 2. **Население городов-миллионеров, тыс. чел.**

Город \ Год	2002	2006	2010	2018	2019	2020	2021
Волгоград	1011	992	1021	1014	1013	1009	1004
Воронеж	849	846	890	1048	1054	1058	1050
Екатеринбург	1294	1308	1350	1469	1483	1494	1495
Казань	1105	1113	1144	1244	1252	1257	1257
Красноярск	909	921	974	1091	1095	1094	1092
Москва	10 126	10 425	11 504	12 506	12 616	12 679	12 655
Нижний Новгород	1311	1284	1251	1259	1254	1252	1244
Новосибирск	1426	1397	1474	1613	1618	1626	1620
Омск	1134	1139	1154	1172	1165	1155	1139
Пермь	1002	993	991	1052	1054	1055	1049
Ростов-на-Дону	1068	1055	1089	1130	1133	1138	1137
Самара	1158	1143	1165	1163	1157	1157	1144
Санкт-Петербург	4661	4581	4880	5352	5384	5398	5384
Уфа	1042	1030	1062	1121	1124	1129	1125
Челябинск	1077	1093	1130	1202	1201	1197	1187

В таблице 2 легко найти данные о нужном городе. Но на некоторые вопросы отвечать неудобно. Например, на вопрос «Какой город в России являлся пятым по численности населения в 2021 г.?».

Чтобы ответить на этот вопрос, строки лучше упорядочить по убыванию численности населения в 2021 г. Первым городом станет Москва, за ней — Санкт-Петербург, Новосибирск и так далее до Волгограда. Сделаем это, причём внесём в эту таблицу не все данные, а только данные за 2021 г.

В построенной таблице 3 сразу видно, что пятым по численности городом является Казань с населением 1 млн 257 тыс. жителей.

Таблица 3. **Население городов-миллионеров в 2021 г.**

Город	Население, тыс. чел	Город	Население, тыс. чел	Город	Население, тыс. чел
Москва	12 655	**Нижний Новгород**	1244	**Уфа**	1125
Санкт-Петербург	5384	**Челябинск**	1187	**Красноярск**	1092
Новосибирск	1620	**Самара**	1144	**Воронеж**	1050
Екатеринбург	1495	**Омск**	1139	**Пермь**	1049
Казань	1257	**Ростов-на-Дону**	1137	**Волгоград**	1004

В зависимости от стоящей задачи данные в таблицах упорядочивают разными способами.

До появления компьютеров таблицы со статистическими данными хранились в огромных бумажных книгах. Поиск нужной информации занимал много времени. В современных процессорах электронных таблиц очень легко упорядочивать данные по любому признаку. Упорядочивание нужно в таблицах спортивных результатов, экономических достижений и всевозможных **рейтингов**[1].

ПРИМЕР 2. В таблице 4 даны результаты забега на 100 м мужчин, занимающихся в спортивном клубе. Для участия в городских соревнованиях по бегу на 100 м тренер хочет отобрать не более восьми лучших бегунов, но только тех, у кого результат не превосходит 11,5 с. Сколько бегунов удовлетворяют этому условию? Как нужно изменить границу отбора, чтобы отобранных бегунов было ровно восемь?

Таблица 4. **Результат забега на 100 м**

Фамилия	Время, с	Фамилия	Время, с	Фамилия	Время, с
Асташкин	10,98	**Карамышев**	11,84	**Шелепин**	12,49
Сычёв	11,20	**Ярушевич**	11,86	**Тугарёв**	12,50
Чернов	11,23	**Осадчий**	12,02	**Зверев**	12,65
Ясенский	11,44	**Гостев**	12,23	**Белов**	12,74
Плахотин	11,45	**Дельнев**	12,30	**Пилюгин**	13,01
Пережогин	11,57	**Львов**	12,34	**Богатырёв**	13,12

Чем меньше времени спортсмен провёл на дистанции, тем лучше. Поэтому мы упорядочили данные по возрастанию времени забега.

Время забега менее 11,5 с у пяти бегунов. Если нужно отобрать ровно восемь, тренер может выбрать границу 12 с.

[1] Слово «рейтинг» происходит от английского слова *rating* — «оценка, определение стоимости, классификация».

Вопросы

1 Для чего применяются таблицы?

2 Какими таблицами вы пользовались в быту и в учёбе? Чем они удобны?

Задачи

3 Пользуясь таблицей 2, найдите численность населения:
а) Новосибирска в 2002 г.; б) Казани в 2002 г.

4 В каком городе население в 2010 г. составляло 1474 тыс. чел.?

5 Сколько городов в России имело население более 1 млн чел. в 2006 г.?

6 На сколько численность населения Санкт-Петербурга в 2021 г. была выше, чем в 2010 г.?

7 На сколько численность населения Екатеринбурга в 2018 г. была выше, чем в 2010 г.?

8 Сколько городов в России в 2002 г. имело население более 1500 тыс. чел.?

9 Рассмотрите таблицу 4. Сколько спортсменов пробежали дистанцию 100 м менее чем за 12,5 с?

10 В таблице 5 даны нормативы по бегу на 100 м.

Таблица 5. **Нормативы по бегу на 100 м, с**

Хронометр	Мастер спорта межд. класса	Мастер спорта	Кандидат в мастера спорта	I разряд	II разряд	III разряд
Ручной	—	—	10,7	11,2	11,8	12,7
Автоматический	10,28	10,64	10,94	11,44	12,04	12,94

Используя таблицу 4, ответьте на вопросы. Считайте, что время измеряли автоматическим хронометром.

а) Сколько спортсменов во время контрольного забега выполнили норматив кандидата в мастера спорта по бегу на 100 м?

б) Сколько спортсменов выполнили норматив I разряда?

в) Сколько спортсменов выполнили норматив II разряда?

11 В математической олимпиаде участвовали 600 учащихся из разных школ города. Наибольший возможный балл был равен 15. В таблице 6 показано, как распределились участники по баллам. Найдите:

а) количество участников, набравших не более 6 баллов;

б) долю участников (в процентах), которые набрали не менее 11 баллов.

Таблица 6. **Распределение участников по баллам**

Балл	0	1	2	3	4	5	6	7
Количество участников	3	8	27	44	53	69	88	80
Балл	8	9	10	11	12	13	14	15
Количество участников	76	54	32	24	20	15	6	1

12 Нужно объявить участникам математической олимпиады (см. задачу 11) граничный балл, то есть наименьший балл, обладатель которого становится призёром или победителем олимпиады. Каким должен быть наименьший граничный балл, чтобы общее количество призёров и победителей:

а) не превышало 30 человек;

б) было не более 10% от общего числа участников? Сколько процентов участников станет победителями и призёрами в этом случае?

13 Электрическую энергию очень трудно запасать в большом количестве (батарейки и аккумуляторы не в счёт). Электростанции производят практически столько электричества, сколько потребляет промышленность, сельское хозяйство и население. Поэтому по производству электроэнергии можно судить о состоянии экономики в стране. В быту количество потреблённой электрической энергии измеряют в киловатт-часах (кВт · ч); в стране — в миллиардах киловатт-часов. В таблице 7 указан объём электроэнергии, произведённой в России в период с 2010 по 2019 г.

Таблица 7. **Производство электроэнергии в России, млрд кВт · ч**

Год	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Объём произведённой электроэнергии	1038	1055	1069	1045	1047	1050	1072	1074	1091	1096

Определите по таблице 7:

а) Сколько электроэнергии было выработано в России в 2012 г.?

б) В каком году электроэнергии было произведено больше: в 2012 или в 2013 г.?

в) В каком году в России было произведено больше всего электроэнергии?

г) Назовите один-два фактора, которые влияют на объём годового потребления электроэнергии в стране.

д)* Как вы думаете, чем объясняется спад в производстве электроэнергии в 2013 г.?

3 Подсчёты и вычисления в таблицах

Подсчёты в таблице

В классе был проведён опрос о том, какие у кого живут домашние животные. Получился следующий список:

Собака, собака, кошка, никого, кошка, рыбка, кошка, никого, кошка, кошка, птица, никого, собака, никого, кошка, птица, собака, кошка, собака, никого, рыбка, кошка, собака, собака, кошка, никого, черепаха, никого, собака, рыбка, кошка, собака, кошка.

Список не показывает прямо, сколько каких животных живёт у школьников. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно провести подсчёты. Проще всего это сделать с помощью таблицы, читая список один раз.

Будем рисовать чёрточки во втором столбце: в списке встретилось слово «собака», значит, рисуем чёрточку в строке «Собака». И так далее.

Пятую чёрточку нарисуем так, чтобы «закрыть» четыре предыдущие. Запись 𝍸 означает пять подсчитанных объектов — пято́к. Так удобнее потом подсчитать общее количество чёрточек в каждой строке. Обработав весь список, получим таблицу 8.

Таблица 8. **Подсчёт животных**

Животное	Встретилось в списке	Всего
Собака	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9
Кошка	𝍸 𝍸 𝍷	11
Никого	𝍸 𝍷𝍷	7
Рыбка	𝍷𝍷𝍷	3
Птица	𝍷𝍷	2
Черепаха	𝍷	1

Теперь легко подсчитать животных каждого вида. Собака в списке встречается 5 раз и ещё 4 раза (𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷), то есть всего 9 раз. Кошка — 11 раз. Птицы живут у двух школьников, рыбки — у троих школьников, а черепаха — только у одного.

Если бы мы считали сначала собак, потом кошек и т. д., нам бы пришлось просматривать список несколько раз. Используя приём с чёрточками, мы прочитали список лишь один раз.

Такой способ подсчётов в таблице использовали ранее, но иногда применяют и сейчас. Например, так делают социологи при ручной обработке бумажных анкет, продавцы в небольших магазинах для учёта проданной продукции.

Разумеется, когда данных очень много, подсчёты можно и нужно проводить с помощью компьютера.

Вычисления в таблицах. Сметы

Иногда значения в одном из столбцов таблицы вычисляются с помощью значений, стоящих в других столбцах и строках. С такими таблицами мы часто встречаемся. Вспомните таблицу умножения или таблицу спортивных состязаний. В этих таблицах одни величины вычисляются с помощью других. Часто приходится составлять сметы.

Смета — это таблица со списком или планом расходов. В смете указывают нужные товары, цены и итоговую стоимость.

ПРИМЕР 1. Спортивный комитет выделил на закупку спортивного инвентаря для летнего лагеря 50 000 р. Было решено купить футбольные, волейбольные и баскетбольные мячи, ракетки, воланы и сетку для бадминтона. Чтобы понять, как распределить деньги и сколько товаров купить, организаторы составили смету расходов (табл. 9).

Таблица 9. **Смета расходов на покупку спортивного инвентаря**

№ п/п	Наименование	Ед. измерения	Количество	Цена ед., р.	Стоимость, р.
1	Мяч футбольный	шт.	20	575,5	
2	Мяч волейбольный	шт.	20	500	
3	Мяч баскетбольный	шт.	10	800	
4	Ракетка бадминтонная	шт.	38	480	
5	Воланы	коробка	15	750	
6	Сетка для бадминтона	шт.	4	700	
				Итого	

В столбце «Стоимость» подводятся итоги по строкам: стоимость равна цене, умноженной на количество купленных единиц товара. Последняя строка в смете отличается от предыдущих. В этой строке подводят суммарные итоги в одном или нескольких столбцах таблицы.

Распределить деньги можно по-разному. Предположим, что спорткомитет решил купить только футбольные и волейбольные мячи, ракетки для бадминтона и воланы. Тогда смета может быть такой, как в таблице 10.

Таблица 10. **Смета расходов на покупку спортивного инвентаря**

№ п/п	Наименование	Ед. измерения	Количество	Цена ед., р.	Стоимость, р.
1	Мяч футбольный	шт.	20	575,5	11 510
2	Мяч волейбольный	шт.	20	500	10 000
3	Мяч баскетбольный	шт.	0	800	0
4	Ракетка бадминтонная	шт.	38	480	18 240
5	Воланы	коробка	15	750	11 250
6	Сетка для бадминтона	шт.	0	700	0
				Итого	51 000

В последней строке видно, что мы превысили выделенную сумму на 1000 р. Придётся менять смету, чтобы уложиться в выделенную сумму. Можно уменьшить количество волейбольных мячей на два. Тогда как раз получится 50 000 р.

Можно поступить иначе: купить меньше на одну ракетку и на одну коробку воланов. Экономия составит 480 + 750 = 1230 р., и общая сумма будет равна 49 770 р. Но в этом случае останется 230 р., на которые уже ничего купить нельзя.

Доли и проценты в таблицах

Часто приходится вычислять долю одной или нескольких частей в едином целом. Если исходные данные записаны в таблице, то доли также принято записывать в таблицу. Покажем на примере, как это делается.

ПРИМЕР 2. Наблюдения показывают, что за последние 40 лет структура занятости населения России сильно изменилась. В таблице 11 показана общая численность населения, численность трудоспособного населения (от 16 лет до пенсионного возраста) и количество людей пенсионного возраста[1] в России в 1981 и в 2021 гг. по данным Росстата Российской Федерации.

Таблица 11. **Население трудоспособного и пенсионного возраста в 1981 и 2021 гг.**

Год	Трудоспособное население, млн чел.	Население пенсионного возраста, млн чел.	Общая численность населения, млн чел.
1981	83,16	22,88	138,84
2021	81,88	36,90	146,17

Данные нельзя считать совершенно точными, кроме того, абсолютные значения мало говорят о том, как изменилась ситуация. Можно лишь заметить, что численность людей пенсионного возраста выросла, а трудоспособного возраста — сократилась. Изменения станут нагляднее, если выразить численность обеих групп в процентах от общей численности населения. Найдём процентную долю людей пенсионного возраста в 1981 г.:

$$22{,}88 : 138{,}84 \cdot 100\% \approx 16{,}48\%.$$

Точно так же проведём вычисления для численности трудоспособного населения и для данных 2021 г. Чтобы сопоставить данные, добавим новые сведения в таблицу.

Таблица 12. **Население трудоспособного и пенсионного возраста в 1981 и 2021 гг.**

Год	Трудоспособное население		Население пенсионного возраста		Общая численность населения, млн чел.
	Количество, млн чел.	Доля, %	Количество, млн чел.	Доля, %	
1981	83,16	59,90	22,88	16,48	138,84
2021	81,88	56,02	36,90	25,24	146,17

Теперь видно, что доля трудоспособного населения уменьшилась, но незначительно — меньше чем на 4% населения, а доля пенсионеров выросла больше чем в полтора раза.

Таблицы удобны тем, что прямо в них можно проводить вычисления, дополняя имеющиеся данные.

[1] Люди пенсионного возраста и пенсионеры — это не одно и то же. Помимо людей пенсионного возраста есть ещё те, кто не достиг установленного пенсионного возраста, но получает специальные пенсии — например, военные пенсионеры, пенсионеры по состоянию здоровья.

Вопросы

1 Как вы думаете, почему принято считать пятка́ми — по пять чёрточек?

2 Что такое смета?

3 Как вы думаете, зачем нужно знать долю численности трудоспособного населения и долю численности людей пенсионного возраста?

4 В городе проводился опрос жителей о том, как потратить часть бюджета на благоустройство — направить деньги на строительство детских площадок или на озеленение улиц. Какие признаки можно выделить у опрашиваемых респондентов?

Задачи

14 Продавцы небольших книжных киосков часто отмечают число проданных за день книг в общей ведомости, чтобы в конце дня быстро подвести итоги работы. Часть такой ведомости дана в таблице 13.

а) Перечертите таблицу 13 в тетрадь и заполните столбец «Всего».

б) Заполните столбец «Выручка».

в) Подсчитайте общее число проданных книг и суммарную выручку и заполните соответствующие ячейки.

Таблица 13. **Ведомость продажи книг**

№ п/п	Название книги	Цена, р.	Продано	Всего	Выручка
1	«Алиса в Стране чудес»	590	II		
2	«Властелин колец»	1100	~~IIII~~ II		
3	«Вредные советы»	190	III		
4	«Гарри Поттер и Орден Феникса»	820	~~IIII~~ ~~IIII~~ III		
5	«Северное сияние»	460	I		

15 Пользуясь таблицей 13 и результатами задачи 14, составьте таблицу долей выручки от продажи каждой книги.

16 Рассмотрите таблицу 2 «Население городов-миллионеров» (см. с. 8).

а) Начертите эту таблицу в тетради, оставив только 2002, 2010 и 2021 гг. Добавьте справа столбец и укажите в нём, на сколько процентов изменилась численность населения каждого города в период с 2002 по 2021 г.

б) В каком городе процентный прирост численности населения наибольший?

в) В каком городе процентный прирост численности населения наименьший?

г) В каких городах произошла **депопуляция**[1] в течение 2002—2021 гг.? Как вы думаете, с чем может быть связана депопуляция именно в этих городах?

д) Найдите в таблице 2 город, где прирост населения за 11 лет (с 2010 по 2021 г.) превышает 15%. Как вы думаете, с чем может быть связан такой резкий рост численности населения в этом городе?

[1] Депопуляция — убыль численности населения.

17 В таблице 14 даны четвертные оценки по математике, русскому и иностранному языкам всех учащихся класса.

Таблица 14. **Оценки за четверть**

№ п/п	Фамилия	Математика	Русский язык	Иностранный язык
1	Авдеев И.	4	3	5
2	Андреева О.	4	4	4
3	Баранкин С.	3	4	3
4	Бодров О.	5	4	5
5	Волин С.	5	5	5
6	Волкова Е.	3	5	4
7	Галкин П.	3	4	3
8	Данилов М.	5	3	5
9	Евсеева С.	4	5	5
10	Жуков Д.	5	4	4
11	Иванова Е.	4	5	5
12	Караваева А.	5	4	5
13	Кузнецов И.	3	3	3
14	Кузовлев П.	3	4	3
15	Ломов Д.	3	3	3
16	Макаров А.	4	3	4
17	Мельникова М.	5	4	3
18	Надюшина С.	4	5	4
19	Норов П.	4	4	3
20	Оганов А.	5	3	4
21	Островая Е.	5	4	5
22	Петров С.	4	5	5
23	Петрова И.	4	4	5
24	Пронина Д.	5	5	4
25	Шашкин П.	4	3	4
26	Яковлева Н.	3	4	4

Пользуясь таблицей 14, составьте таблицу с результатами подсчёта учеников, которые имеют:

а) пятёрку по математике;

б) пятёрку или четвёрку по русскому языку;

в) пятёрку хотя бы по одному из предметов;

г) пятёрки по двум или трём предметам.

18 По таблице 9 (с. 13) ответьте на следующие вопросы:

а) Какой из товаров самый дорогой?

б) Какой из товаров самый дешёвый?

в) Какого товара решили купить больше всего? Как вы думаете, почему?

г) Какого инвентаря решили купить меньше всего? Как вы думаете, почему?

19 Начертите таблицу 9 в тетради, найдите стоимость каждого вида товара и заполните последний столбец. Ответьте на следующие вопросы:

а) На какой вид инвентаря планируется потратить самую большую сумму?

б) На какой вид инвентаря планируется потратить самую маленькую сумму?

20 Предложите какой-нибудь способ составления сметы по таблице 9 так, чтобы были куплены волейбольные и футбольные мячи, ракетки, воланы и сетки и чтобы общая сумма покупки была ровно 50 000 р.

21 Пользуясь данными таблицы 9, составьте собственную смету для покупки трёх из перечисленных видов спортивного инвентаря на общую сумму от 9900 до 10 000 р.

22 Рассмотрите таблицу 7 (с. 11). Найдите, как изменялось год от года производство электрической энергии в России в 2011—2019 гг. в процентах от показателя предыдущего года. Перечертите в тетрадь таблицу 15 и заполните пустые ячейки.

Таблица 15. **Изменение производства электроэнергии в России**

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Изменение по отношению к предыдущему году, %	1,6			0,2					

23 Всё чаще мы оплачиваем коммунальные услуги через компьютер или смартфон. Однако ещё встречаются бумажные платёжные квитанции. Ниже показана заполненная платёжная квитанция для оплаты электроэнергии в квартире.

Квитанция

Получатель платежа ПАО "Мосэнергосбыт"

Код РР

Номер лицевого счета

Ф.И.О. *************** Период сен.19 (месяц, год)

Адрес Москва, ул.Липецкая, ********

Код платежа	Тарифная зона	Показания счётчиков текущее	Показания счётчиков предыдущее	Расход (кВтч)	Тариф (руб/кВтч)	Сумма к оплате (руб)
13	Т1	10345	10242		6,57	
2	Т2	9322	9234		2,13	
15	Т3	8233	8120		5,47	
					Итого:	

*Коды платежа:

1 - Т1 (день) - для однотарифного и двухтарифного учета

13 - Т1 (пик) - для трёхтарифного учета

2 - Т2 (ночь) - для двухтарифного и трёхтарифного учета

15 - Т3 (полупик) - для трехтарифного учета

Итого к оплате: руб. коп.

Подпись

Разберитесь в платёжной квитанции, заполните пустые ячейки «Расход», «Сумма к оплате» и «Итого» и ответьте на вопросы:

а) Сколько кВт · ч израсходовано по тарифной зоне Т1 «пик» с момента установки счётчика к моменту снятия показаний в сентябре?

б) Сколько кВт · ч израсходовано по тарифной зоне Т1 «пик» с момента предыдущего снятия показаний в августе?

в) Какую сумму владелец квартиры должен заплатить по тарифу Т2 «ночь»?

г) Какую сумму он должен заплатить всего?

4 Столбиковые диаграммы

Таблицы удобны для упорядочивания и поиска данных. Однако они не дают наглядного представления о соотношении величин. Для этого используют **диаграммы**. Диаграммы часто встречаются в Интернете, в газетах, журналах и книгах, они иллюстрируют соотношение и изменение различных величин.

Диаграммы используются для наглядного, запоминающегося изображения и сопоставления данных.

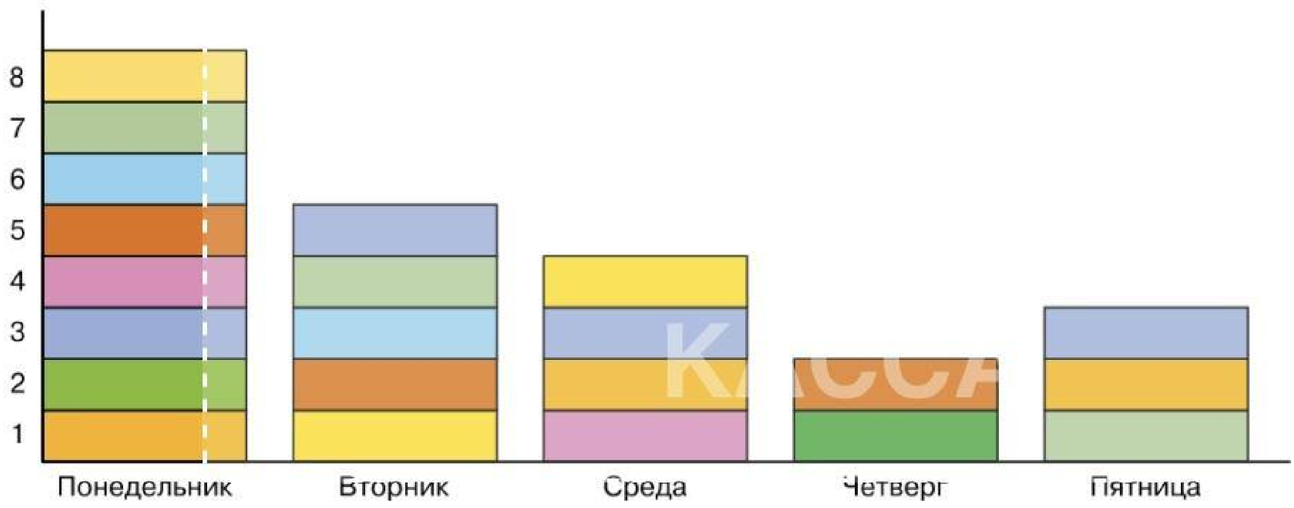
ПРИМЕР 1. В таблице 16 приведены данные о числе шоколадок, проданных в школьной столовой в учебные дни с понедельника по пятницу.

Таблица 16. **Продажа шоколада**

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница
Число шоколадок	8	5	4	2	3

Наглядно эти данные можно изобразить в виде столбиков, каждый из которых показывает число шоколадок, проданных за день (диагр. 2).

Диаграмма 2. **Количество проданных шоколадок**



Чтобы построить **столбиковую диаграмму**, мы начертили горизонтальную и вертикальную прямые линии. На горизонтальной прямой отметили дни недели с понедельника по пятницу. Над каждой отметкой изобразили стопку проданных шоколадок. На вертикальную прямую нанесли деления, помогающие понять, сколько шоколадок в каждом столбике.

Диаграмму можно упростить. Вместо шоколадок лучше нарисовать просто столбики разной высоты. Ниже показаны два варианта оформления диаграммы 2 — с зазорами между столбиками и без зазоров (диагр. 3 и 4).

Диаграмма 3

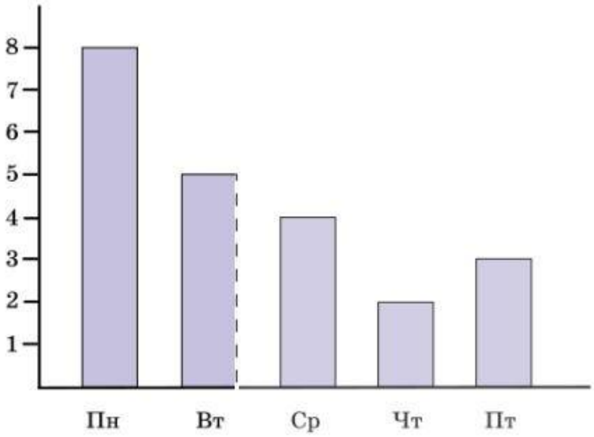
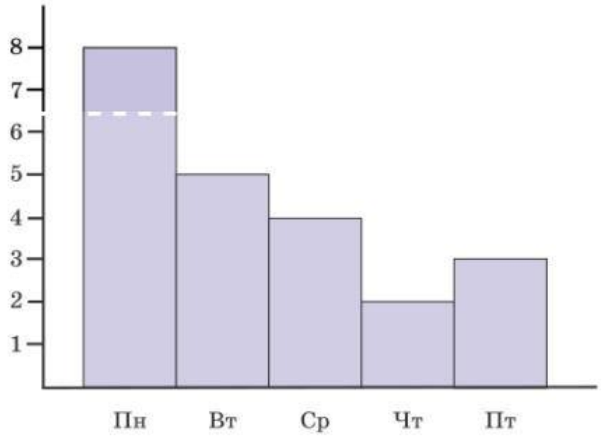


Диаграмма 4



Высоты столбиков наглядно отражают соотношение между величинами. Большая точность не требуется, но столбики диаграммы должны быть одинаковой ширины. Зазоры между столбиками тоже должны быть одинаковыми.

Иногда на диаграмме столбики удобно откладывать не от нулевой высоты, а от другого значения.

ПРИМЕР 2. Диаграммы 5 и 6 показывают средние цены на один и тот же смартфон за период с августа 2021 г. по январь 2022 г.

Диаграмма 5

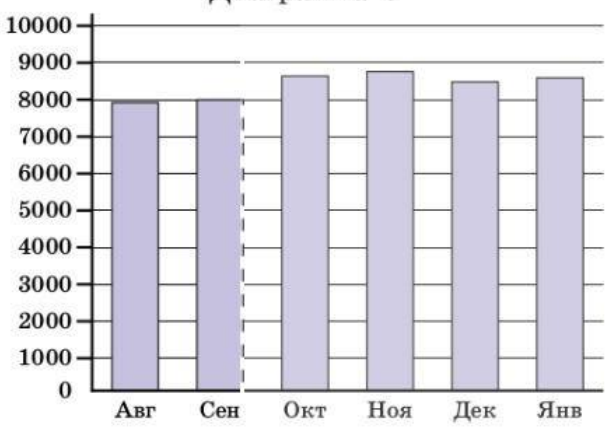
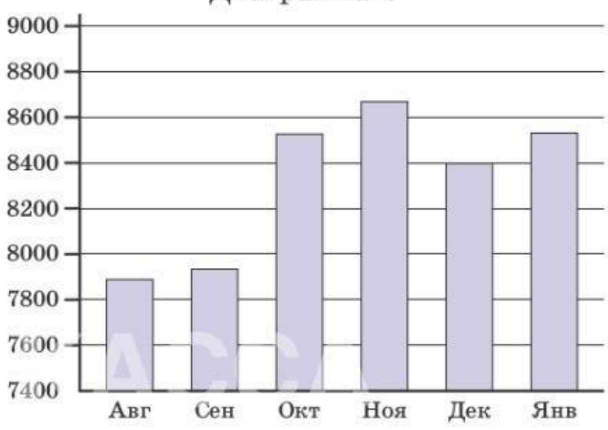


Диаграмма 6



Разница в том, что на диаграмме 5 столбики откладываются от значения 0 р., а на диаграмме 6 — от 7400 р. На диаграмме 5 меньше масштаб: одно деление соответствует 1000 р., а на диаграмме 6 — масштаб в пять раз больше: в одном делении 200 р. Поэтому на диаграмме 5 различия столбиков по высоте видны хуже, чем на диаграмме 6. С другой стороны, на диаграмме 5 можно визуально **оценить**[1] прирост или падение цены по сравнению с предыдущим годом. По диаграмме 6 такую оценку сделать трудно из-за того, что отношение высот столбиков не равно отношению цен.

Зато на диаграмме 6 лучше видно различия между соседними столбиками.

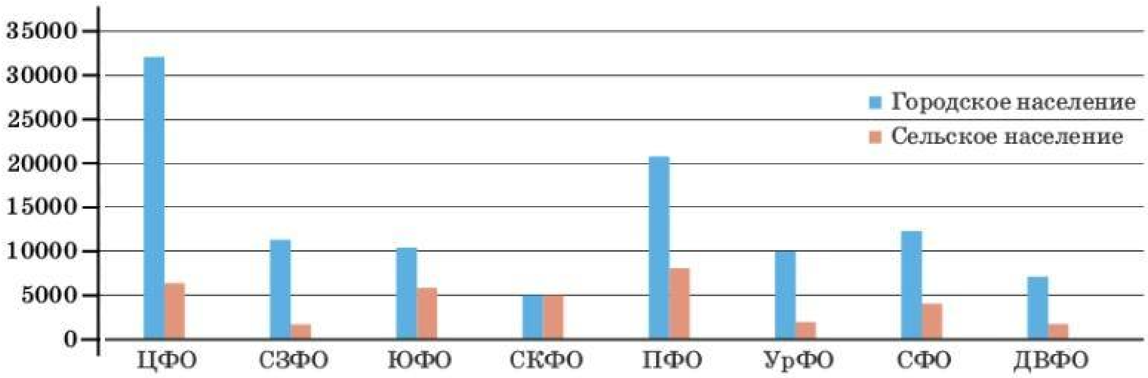
[1] Оценить — здесь: найти приближённое значение.

Выбор начала отсчёта по вертикальной оси и масштаба зависит от природы данных и от целей, которые стоят перед исследователем.

Столбиковые диаграммы применяются не только тогда, когда нужно увидеть, как меняется одна и та же величина со временем. Столбиковые диаграммы используются для наглядного сравнения разных, но близких по смыслу величин. При необходимости на столбиковой диаграмме можно показывать два или несколько **рядов данных**, то есть рядов столбиков. Подпись, которая помогает разобраться в диаграмме, называется **легендой** диаграммы.

ПРИМЕР 3. На диаграмме 7 показана численность городского и сельского населения Федеральных округов России в 2021 г. Городское и сельское население показано в одном и том же масштабе двумя рядами. Благодаря вертикальной оси мы видим, сколько примерно горожан и сельских жителей в каждом округе, в то же время столбики позволяют визуально сравнивать эти значения. Например, видно, что в Центральном федеральном округе примерно в 5 раз больше людей живёт в городе, чем в сельской местности, а в Северо-Кавказском округе сельских и городских жителей примерно поровну.

Диаграмма 7



Вопросы

1 Чем диаграмма удобнее таблицы?

2 В каких случаях таблица удобнее диаграммы?

3 Какие требования нужно соблюдать при построении столбиковой диаграммы?

4 Что такое легенда диаграммы?

Задачи

24 По диаграмме 2 определите:

а) в какой день недели продано больше всего шоколадок;

б) в какой день недели продали меньше всего шоколадок.

25 По диаграмме 2 определите, во сколько раз больше продано шоколадок в понедельник по сравнению со средой; с четвергом.

26 Можно ли с помощью диаграммы 2 сделать вывод, что в конце недели продаётся меньше шоколадок, чем в начале?

27 За контрольную работу по математике школьники получили 6 оценок «отлично», 10 оценок «хорошо», 5 оценок «удовлетворительно» и 3 оценки «неудовлетворительно». Постройте столбиковую диаграмму по этим данным.

28 В таблице 17 указаны 6 лучших нападающих премьер-лиги чемпионата России по футболу сезона 2018—2019 гг. и место команды по итогам чемпионата.

Таблица 17. **Лучшие нападающие**

Игрок	Команда	Число голов	Место
Чалов Фёдор	ЦСКА (Москва)	15	4
Азмун Сердар	«Зенит» (Санкт-Петербург)	13	1
Классон Виктор	«Краснодар»	12	3
Дриусси Себастьян	«Зенит» (Санкт-Петербург)	11	1
Миранчук Антон	«Локомотив» (Москва)	11	2
Зе Луиш	«Спартак» (Москва)	10	5

а) Постройте столбиковую диаграмму числа голов, забитых лучшими нападающими.

б) Можно ли сказать, что среди нападающих есть явный лидер?

в) Как вы думаете, есть ли связь между числом голов, забитых нападающими, и результатами их команд? Иными словами, можно ли утверждать, что чем больше голов забил игрок, тем выше место его команды в чемпионате?

29 В таблице 18 приведены данные о выработке электроэнергии в России в период с 2010 по 2019 г. в миллиардах киловатт-часов.

Таблица 18. **Производство электроэнергии в России**

Год	2010	2011	2012	2013	2014
Объём произведённой электроэнергии, млрд кВт · ч	1038	1055	1069	1045	1047
Год	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Объём произведённой электроэнергии, млрд кВт · ч	1050	1072	1074	1091	1096

а) Постройте столбиковую диаграмму по данным таблицы 18. Какое значение удобно взять в качестве начального на вертикальной оси?

б) Можно ли сказать, что выработка электроэнергии сильно меняется год от года?

в) В каком году выработка электроэнергии была самой низкой?

г) В каком году выработка электроэнергии была самой высокой?

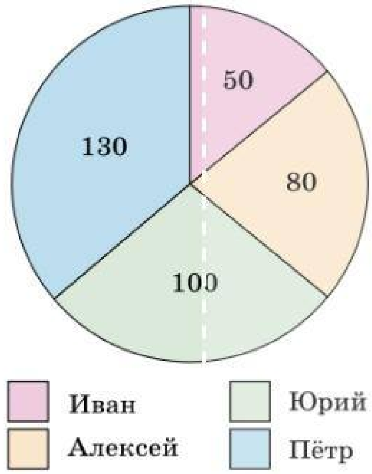
д) В каком году прирост выработки электроэнергии был самым высоким?

е)* Какую **тенденцию**[1] можно заметить в этих данных в период с 2014 по 2018 г.?

[1] Тенденция — устойчивое направление развития (рост, снижение, постоянство), наблюдаемое на протяжении длительного времени.

5 Круговые диаграммы

Диаграмма 8.
Деление пиццы



Четыре друга в складчину покупают круглую пиццу за 360 р. Иван внёс 50 р., Алексей — 80 р., Юрий — 100 р. и Пётр — 130 р. Построим круговую диаграмму, показывающую долю каждого (диагр. 8) (пиццу они, конечно, поделят потом поровну). Пицца стоит 360 р., поэтому каждому рублю соответствует сектор с углом 1°.

Если бы друзья делили пиццу не поровну, а пропорционально своим долям в общей сумме, то Ивану достался бы сектор пиццы с углом 50°, Алексею — сектор с углом 80° и т. д.

Деление круга на секторы, пропорциональные частям целого, настолько наглядно, что его используют в самых разных случаях. Полученная таким образом схема называется **круговой диаграммой**. В английском языке используется слово pie chart (пай чарт), что дословно означает «схема пирога», или «пироговая диаграмма».

Диаграмма, показывающая, как целое делится на части в виде секторов круга, углы которых пропорциональны долям единого целого, называется **круговой диаграммой**.

Чтобы построить круговую диаграмму на бумаге, нужны линейка, циркуль и транспортир. Чтобы раскрасить секторы, полезно иметь цветные карандаши или фломастеры. Нет необходимости строить углы очень точно. На рисунке 2 показаны две круговые диаграммы. На одной из них малый сектор имеет угол ровно 47°, а на другой угол равен 48°. Попробуйте определить, где какая диаграмма.

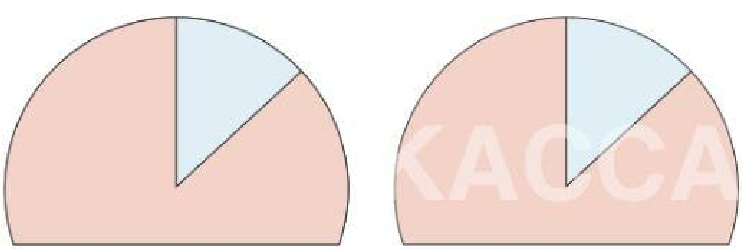


Рисунок 2. **Какой угол меньше?**

При построении круговой диаграммы не нужно откладывать углы с большой точностью. Небольшая погрешность не мешает правильно воспринимать диаграмму. Главные достоинства круговой диаграммы — наглядность восприятия и быстрота построения.
Для точного представления и анализа данных диаграммы не подходят, для этого нужны таблицы.

Целое делится на несколько частей, поэтому диаграмма состоит из нескольких секторов. Угол каждого сектора приближённо пропорционален той доле, которую он показывает.

Иногда встречаются неудачные диаграммы. На представленной на рисунке 3, *а* диаграмме «Структура занятости населения города» слишком много секторов. Диаграмма плохо читается, сравнивать доли неудобно. Лучше объединять близкие отрасли в одну. Например, можно объединить категории «Торговля» и «Общественное питание».

На рисунке 3, *б* показано деление целого на две части. Проще сказать: «Примерно треть избирателей не явилась на участок». На рисунке 3, *в* изображена диаграмма, где все шесть долей примерно одинаковы. Лучше было бы написать: «Все шесть сортов минеральной воды пользуются примерно одинаковым спросом».

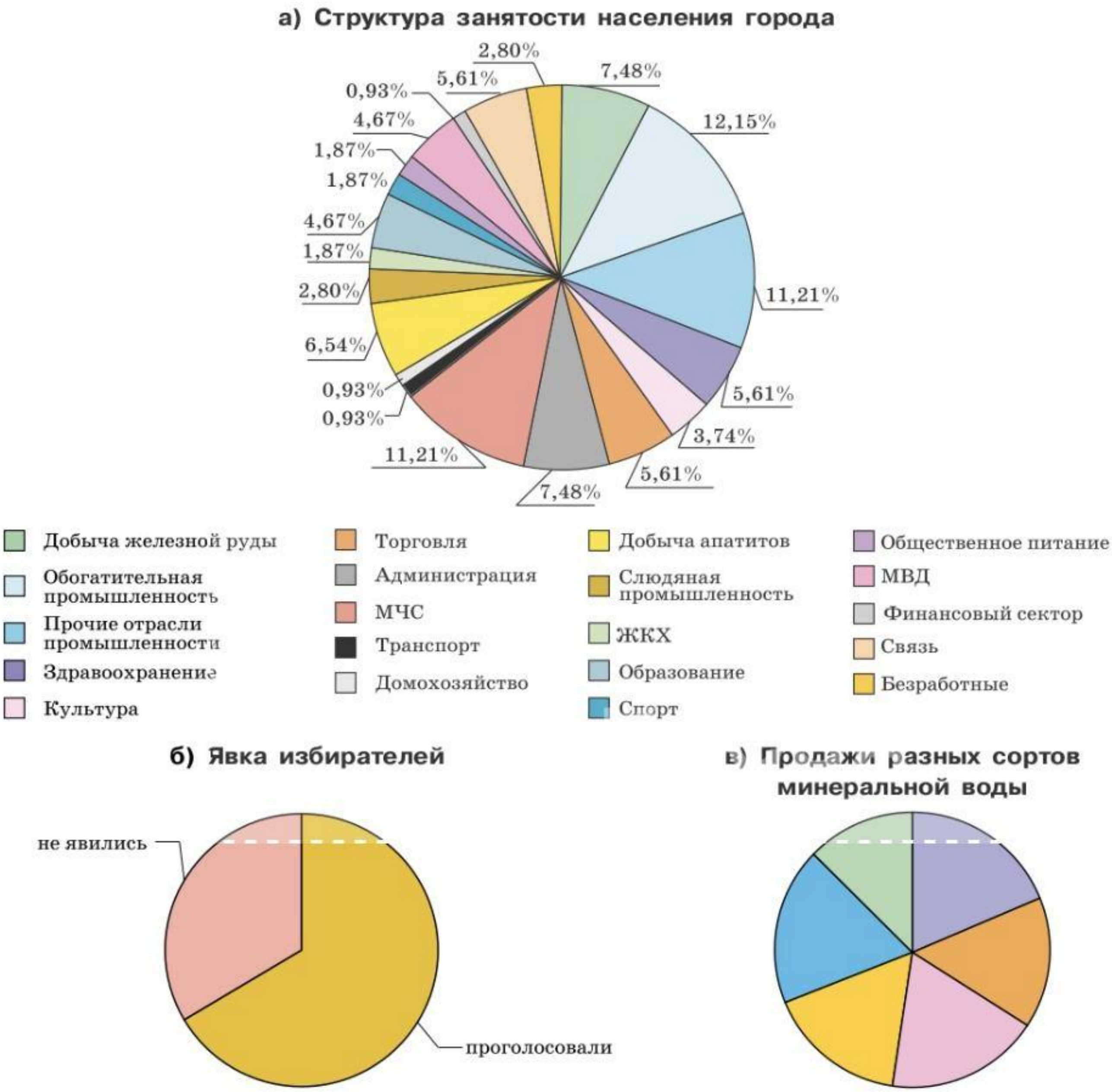


Рисунок 3. **Примеры неудачных круговых диаграмм**

ПРИМЕР. В таблице 19 даны сведения о всех океанах Земли.

Постройте круговую диаграмму, показывающую долю каждого океана в общей площади поверхности всех океанов Земли.

Таблица 19. **Океаны**

Океан	Площадь поверхности, млн км^2	Объём воды, млн км^3	Средняя глубина, м
Атлантический	91,6	329,7	3597
Индийский	73,6	292,1	3890
Северный Ледовитый	14,8	18,1	1225
Тихий	169,2	710,4	3976
Южный	20,3	72,4	3270

Решение. Вычислим общую площадь поверхности всех океанов:

$$91{,}6 + 73{,}6 + 14{,}8 + 169{,}2 + 20{,}3 = 369{,}5 \text{ (млн км}^2\text{)}.$$

Найдём долю каждого океана. Доля Атлантического океана равна

$$91{,}6 : 369{,}5 \approx 0{,}248,$$

то есть примерно 24,8%. Следовательно, сектор, соответствующий Атлантическому океану, имеет угол $360° \cdot 0{,}248 \approx 89{,}3°$. Аналогично вычислим доли и углы секторов для остальных четырёх океанов. Результаты для удобства занесём в таблицу 20.

Таблица 20. **Площади поверхности океанов**

Океан	Площадь поверхности, млн км^2	Доля в общей площади поверхности, %	Угол сектора на диаграмме, градусы
Атлантический	91,6	24,8	89,3
Индийский	73,6	19,9	71,7
Северный Ледовитый	14,8	4,0	14,4
Тихий	**169,2**	**45,8**	**164,8**
Южный	**20,3**	**5,5**	**19,8**

При построении диаграммы округлим углы до целого числа градусов или даже до углов, кратных 5°. Не забудем раскрасить секторы и добавить легенду, которая упрощает чтение и понимание диаграммы.

Видно, что Тихий океан занимает около половины, а Атлантический — примерно четверть площади всего Мирового океана (диагр. 9).

Диаграмма 9. **Площади поверхности океанов**

Столбиковые диаграммы удобны, когда нужно показать, как одна и та же величина меняется со временем, или когда нужно сравнить разные (но сравнимые) величины.
Круговая диаграмма нужна для других целей — она показывает, как единое целое делится на части.

Вопросы

1 Почему не требуется строить секторы круговой диаграммы очень точно?

2 В таблице 19 даны средние глубины пяти океанов. Имеет ли смысл использовать круговую диаграмму для графического изображения этих данных о глубинах?

3 В таблице 19 есть данные об объёме водных запасов в каждом из пяти океанов. Имеет ли смысл использовать круговую диаграмму для графического изображения этих данных об объёмах воды?

4 Имеет ли смысл использовать круговую диаграмму для изображения долей мальчиков и девочек в вашем классе?

5 Попробуйте сформулировать общее правило о том, когда лучше строить столбиковую диаграмму, а когда — круговую.

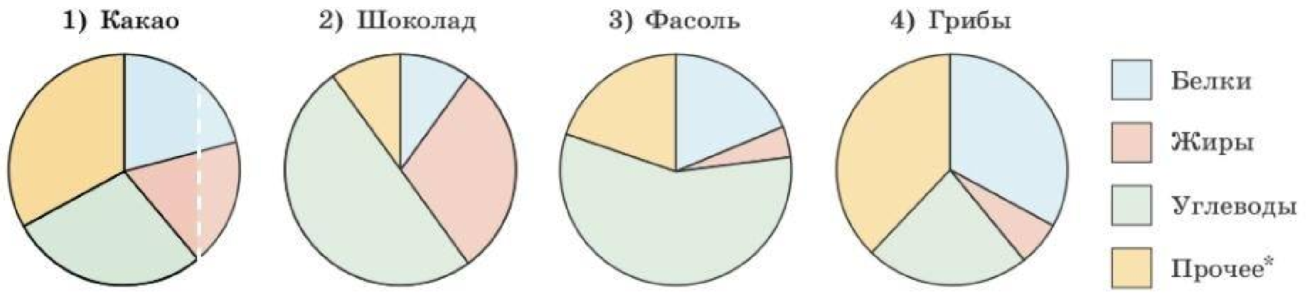
Задачи

30 На диаграмме 10 показаны данные о числе учебных и художественных книг русских и зарубежных авторов в школьной библиотеке. Сколько примерно учебных книг в библиотеке, если всего в библиотеке 800 книг?

Диаграмма 10. **Школьный библиотечный фонд**

31 На диаграмме 11 показано содержание питательных веществ в четырёх разных продуктах. Определите по диаграмме, в каком продукте содержание белков превышает 25%.

Диаграмма 11. **Содержание питательных веществ**



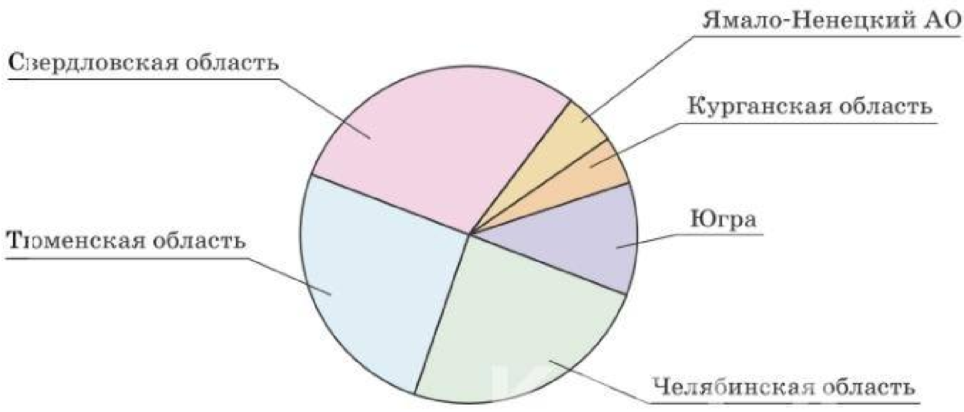
* К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

32 Уральский федеральный округ (УрФО) состоит из шести регионов. На диаграмме 12 представлены сведения о соотношении численности населения в регионах округа по данным на 1 января 2018 г.

а) В каком из регионов УрФО наибольшая численность населения?

б) Найдите примерно долю населения Челябинской области в общей численности населения УрФО.

Диаграмма 12. **Численность населения УрФО**



33 Пользуясь данными из таблицы 19, постройте круговую диаграмму, показывающую соотношение объёмов воды в пяти океанах Земли.

34 Рассмотрите диаграмму 9. Какие из следующих утверждений верны?

1) Площадь поверхности Тихого океана намного превышает площади четырёх остальных океанов, вместе взятых.

2) Атлантический океан составляет примерно четверть Мирового океана по площади водной поверхности.

3) Индийский океан превышает Атлантический по площади водной поверхности.

4) Северный Ледовитый океан — самый маленький океан по площади водной поверхности.

35 В одной из школ опросили 30 учеников и учителей о домашних животных, живущих в их семьях (из одной семьи опрашивали только одного человека). Результаты опроса занесены в таблицу 21.

Таблица 21. **Домашние животные**

Кошка	Собака	Птица	Рыбка	Другие	Нет
18	10	5	2	7	6

а) Суммарное число животных больше, чем число опрошенных семей. Чем это можно объяснить?

б)* Предположим, что в каждой семье есть животные не более чем двух видов. Пользуясь таблицей 21, найдите число семей, где ровно один вид животных. Постройте круговую диаграмму, показывающую доли семей: без домашних животных; с одним видом животных; с двумя видами.

36 В течение четверти Ваня получил следующие оценки: по английскому языку — 4, 5, 5, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 5; по математике — 4, 3, 5, 5, 4, 5, 5, 4.

а) Постройте круговые диаграммы распределения оценок по каждому из предметов. Сравните диаграммы.

б) Можно ли утверждать, что Ваня примерно одинаково учится по этим предметам?

6* Возрастно-половые диаграммы

Почти в каждой науке применяются специальные диаграммы, удобные для изображения определённых данных. В метеорологии[1] для изображения силы и направления ветра применяются лепестковые диаграммы, в экономике применяются биржевые диаграммы для изображения курсов ценных бумаг и их колебаний. Позже мы познакомимся с диаграммами рассеивания, которые позволяют наглядно отразить связь между двумя величинами. Сейчас мы расскажем только об одном типе специальных диаграмм.

В **демографии** — статистической науке о населении — применяются **возрастно-половые диаграммы (половозрастные пирамиды)**. Эти диаграммы показывают количество мужчин и женщин в каждом возрастном интервале. Состоит такая диаграмма из двух столбиковых диаграмм. Столбики строятся горизонтально по разные стороны от общей оси.

По форме половозрастной пирамиды можно судить о том, какой след оставили войны и другие социальные потрясения, и о том, как реализуется в стране демографическая политика.

ПРИМЕР 1. На диаграмме 13 изображена половозрастная пирамида России на 1 января 2021 г. Сколько процентов составляет население в возрасте 20—24 лет?

На пирамиде находим соответствующий «слой». Видно, что мужчины в возрасте 20—24 лет составляют 2,3%, а женщины того же возраста — 2,2% всего населения России.

Зная численность населения России (146,2 млн чел. на 1 января 2021 г.), можно оценить количество россиян в возрасте от 20 до 24 лет:

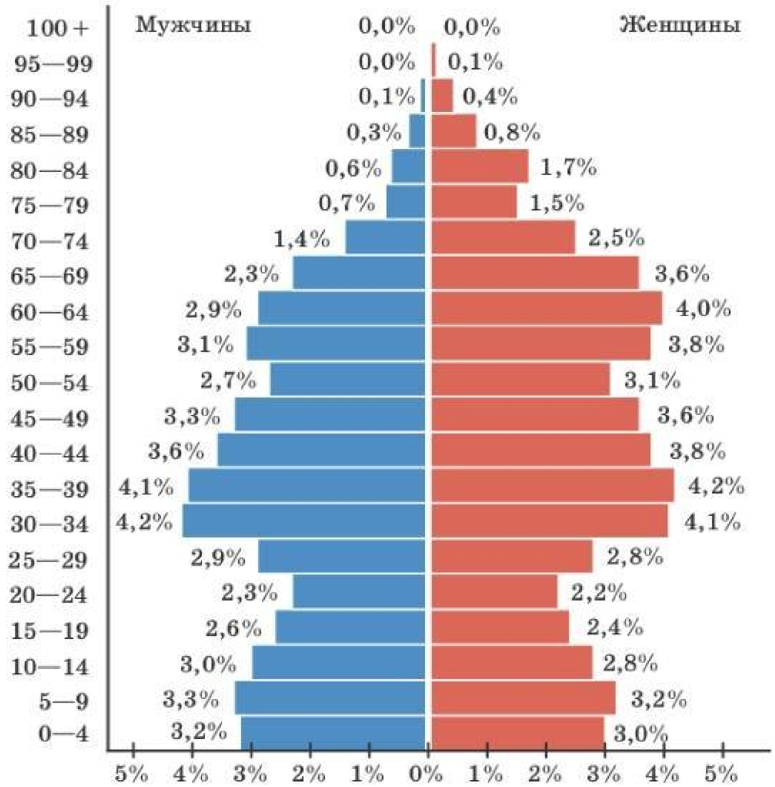
$$146{,}2 \cdot (0{,}023 + 0{,}022) \approx 6{,}58 \text{ млн чел.}$$

[1] Метеорология — наука об атмосферных явлениях.

ПРИМЕР 2. Чем можно объяснить сужение пирамиды в возрастном диапазоне 45—59 лет?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вспомнить историю нашей страны. В 1941 г. началась Великая Отечественная война, которая продлилась почти четыре года и стоила нашей стране множества жизней[1]. На фронтах погибло очень много молодых людей, и у них не родились дети. Кроме того, в годы войны резко снизилась рождаемость. Поэтому на пирамиде видно резкое сужение в слоях 70—79 лет. Следующее поколение тоже оказалось малочисленным: мало родителей — мало детей. Слои 45—59 лет на демографической пирамиде России — это «эхо войны».

Диаграмма 13. **Половозрастная пирамида России на 1 января 2021 г.**



Есть и второе «эхо войны» — внуки военного поколения. «Второе эхо» наложилось на период распада СССР и последующие кризисные годы. Рождаемость снова резко снизилась. Поэтому на пирамиде мы видим ещё одно сужение: россиян в возрасте 15—29 лет намного меньше, чем могло бы быть.

Войны и экономические кризисы сказываются на населении любой страны длительное время.

Вопросы

1. Как называется специальная демографическая диаграмма, показывающая численность мужского и женского населения?
2. За счёт чего может увеличиваться или уменьшаться численность трудоспособного населения в стране помимо войн?

[1] До сих пор не утихают споры, сколько граждан СССР погибло во время войны. В 2015 г. Министерство обороны России опубликовало данные, согласно которым общие потери составили 26,6 млн чел.

Задачи

37 Выделяют три основных типа воспроизводства и возрастной структуры населения.

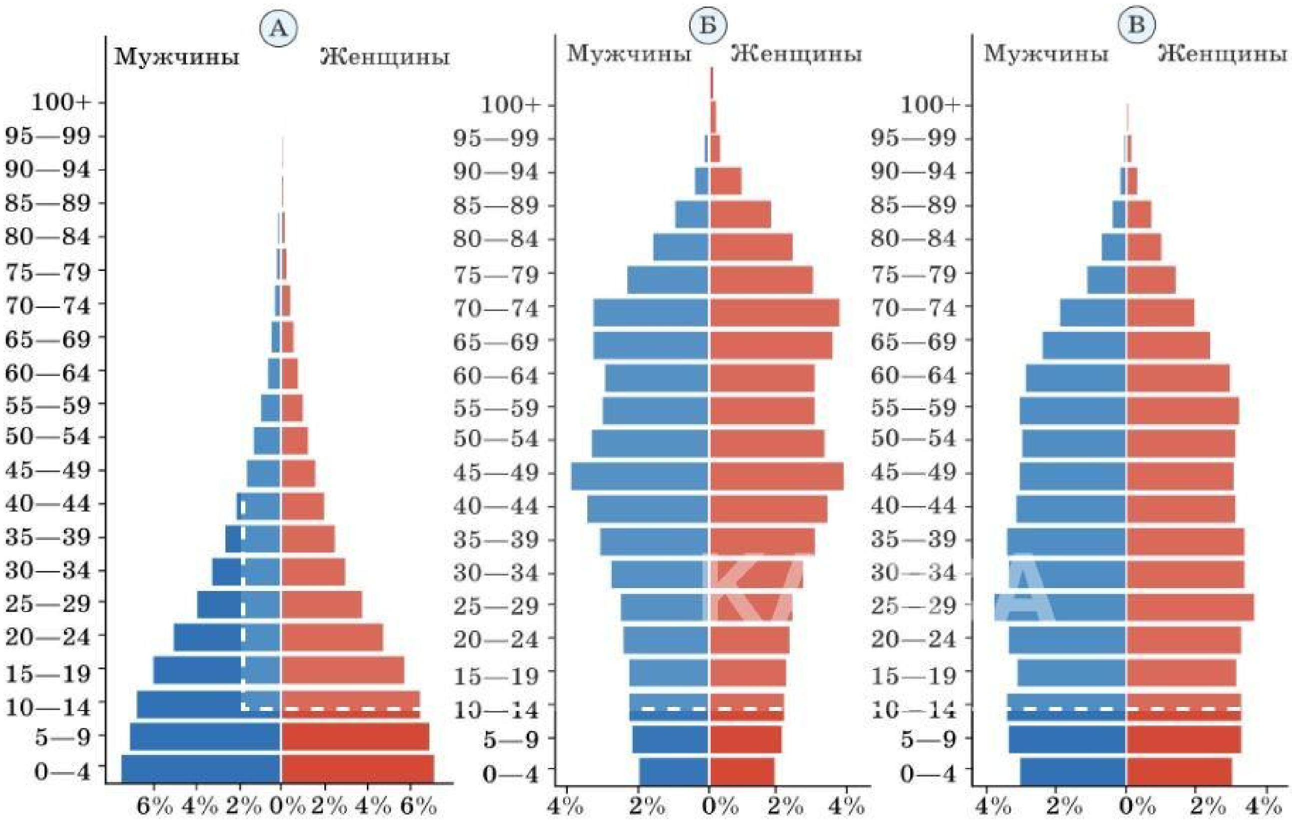
Прогрессивный тип характеризуется высокой долей детей в населении страны, высокой рождаемостью и низкой средней продолжительностью жизни. Такой тип характерен для большинства слаборазвитых стран.

Стационарный тип характеризуется почти уравновешенной долей детских и старших возрастных групп, невысокой стабильной рождаемостью. Такой тип чаще всего встречается в странах с развивающейся экономикой, в которых длительное время не было ни экономических, ни политических потрясений.

При *регрессивном* типе доля пожилых людей в составе населения высока, а детей мала. Наблюдается низкая рождаемость при высокой средней продолжительности жизни. Такой тип характерен для современных развитых индустриальных стран.

На диаграмме 14 изображены половозрастные пирамиды трёх стран: Японии, Афганистана и Исландии. Определите, какая диаграмма какой стране соответствует.

Диаграмма 14. **Половозрастные пирамиды трёх стран**



38 По данным Росстата на 1 января 2021 г. население России составляло 146,2 млн чел. Рассмотрите диаграмму 13.

а) Найдите численность детей в возрасте до 4 лет на 1 января 2021 г. в России.

б) На сколько мальчиков в возрасте до 4 лет было больше, чем девочек?

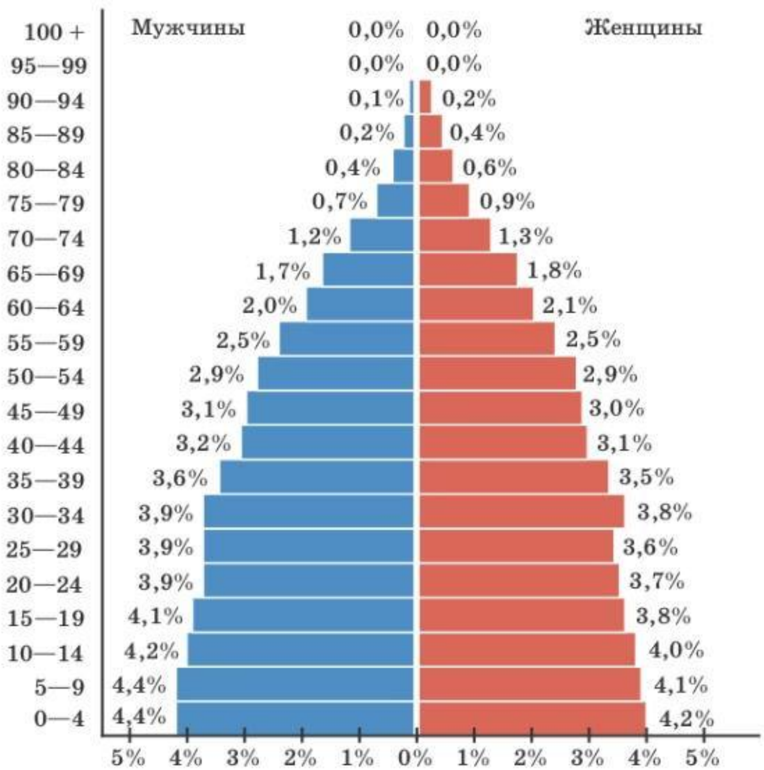
39 На диаграмме 15 изображена половозрастная пирамида населения всей Земли по данным на конец 2021 г. (общая численность человечества на этот момент 7,87 млрд чел.). Рассмотрите диаграмму и ответьте на вопросы.

а) Сколько в 2021 г. на планете было детей в возрасте 10—14 лет?

б) Рассмотрим только детей в возрасте до 9 лет. На сколько в 2021 г. в мире мальчиков было больше, чем девочек?

в) Рассмотрим только людей в возрасте 60 лет и старше. На сколько мужчин было меньше, чем женщин?

Диаграмма 15. **Половозрастная пирамида населения Земли на 2021 г.**

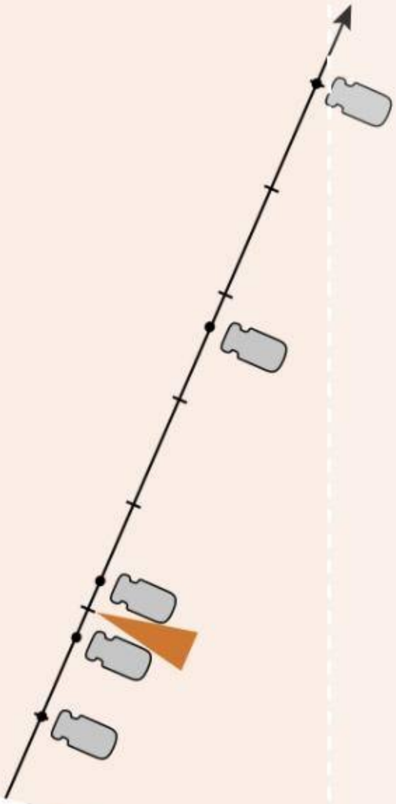


40 Рассмотрите половозрастную пирамиду России, составленную на 1 января 2021 г. (диагр. 13). Сделайте прогноз, на сколько процентов и в какую сторону изменится количество взрослых людей в возрасте 30—34 лет к началу 2041 г. по сравнению с началом 2021 г.

Указание. Нужно сравнить численность тех, кому в 2041 г. будет 30—34 года, с численностью тех, кому 30—34 года было на начало 2021 г.

II Описательная статистика

В этой главе речь пойдёт о том, как одним-двумя числами описать важные свойства большого массива данных. Отсюда название главы — «Описательная статистика».
Существует множество описательных показателей, по которым можно судить о средних значениях, рассеивании, симметричности и характере изменения статистических данных.
В статистике широко используются среднее арифметическое и медиана.



7 **Среднее арифметическое**

8 **Медиана**

9 **Наименьшее и наибольшее значения. Размах**

10* **Обозначения в статистике. Свойства среднего арифметического**

В этой главе речь пойдёт о массивах или наборах чисел и о том, как описать одним-двумя числами важные свойства набора, в котором много чисел. Раздел статистики, изучающий методы описания данных, называется **описательной статистикой.** Чтобы одним числом охарактеризовать весь числовой массив, используют различные средние значения. В статистике широко используются среднее арифметическое, медиана. Иногда требуются и другие средние.

> Какое именно среднее лучше выбрать для описания того или иного набора данных, зависит от природы данных, целей исследования и сложившихся традиций.

7 Среднее арифметическое

В таблице 22 показаны цены одного из популярных смартфонов в 10 разных интернет-магазинах на 13 января 2022 г.

Таблица 22. **Цена смартфона, р.**

Магазин	Цена	Магазин	Цена
1	8050	6	7790
2	8480	7	8290
3	8590	8	7890
4	8340	9	7970
5	8190	10	7910

Цены в разных магазинах разные, это связано с многими факторами, но в целом можно считать, что данные **однородны** — речь идёт об одном и том же смартфоне, и резко выделяющихся значений нет. Чтобы одним числом охарактеризовать цену смартфона в указанный день, разумно найти среднюю цену. Сложим все цены и разделим на количество слагаемых, то есть на 10. Получается

$$\frac{8050+8480+8590+8340+8190+7790+8290+7890+7970+7910}{10}=8150 \text{ (р.)}.$$

Для простоты можно считать, что массив состоит не из цен в рублях, а из чисел. Поэтому мы не писали единицы измерения у каждого слагаемого, а указали их один раз в конце в скобках.

Найденное значение называется **средним арифметическим**. На это значение можно ориентироваться при принятии решения о покупке. Цена намного выше средней, скорее всего, не устроит покупателя, а цена намного ниже выглядит подозрительно.

Среднее арифметическое — самая употребительная центральная мера. Поэтому иногда среднее арифметическое называют просто **средним** или **средним значением**.

> **Средним арифметическим** числового массива называется отношение суммы всех чисел массива к их количеству.

Нанесём все величины на числовую ось точками, а среднее значение укажем стрелкой (рис. 4).

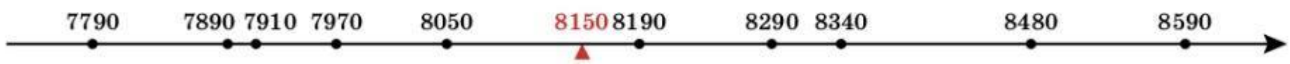


Рисунок 4. **Цены на смартфон в 10 магазинах, р.**

Пять чисел меньше среднего и пять больше. При этом значение 8190 довольно близко к среднему.

Среднее арифметическое является центром набора чисел. Поясним, что здесь означает слово «центр». Представим, что числовая ось является стержнем, на который подвешены одинаковые гири в точках, соответствующих отмеченным числам (рис. 5).

Рисунок 5. **Среднее арифметическое — точка равновесия**

На стержне существует точка равновесия. На эту точку можно «опереть» стержень с гирями так, что стержень окажется в равновесии. Этой точкой оказывается среднее арифметическое. В физике точку равновесия называют **центром масс**.

Пример с гирями иллюстрирует главное свойство среднего арифметического: оно одинаково зависит от всех чисел набора. И большие, и малые числа входят в среднее арифметическое «с одинаковым весом». В некоторых случаях это достоинство оборачивается недостатком: если в наборе по ошибке или в силу каких-то особенных причин есть очень большое или очень малое значение, то оно одно очень сильно влияет на среднее арифметическое, и тогда среднее не очень хорошо описывает весь набор в целом.

Среднее арифметическое хорошо описывает однородные массивы данных, то есть массивы, в которых величины имеют один и тот же смысл, и нет значений, которые сильно отличаются от большинства.

Иногда среднее арифметическое используют для описания данных просто в силу сложившейся традиции. Хороший пример — школьные оценки. Чтобы вывести четвертную оценку, учителя используют среднее арифметическое, хотя оценки не являются числами, а поэтому сумма оценок не имеет математического смысла. Ведь если сложить двойку и тройку, то оценка «пять» не получится. Более того, если школьник вначале получал двойки, но позже разобрался в материале и стал заслуженно получать отличные оценки, среднее арифметическое всё равно будет низким: средняя оценка не учитывает, какие оценки получены раньше, а какие — позже. Средняя арифметическая четвертная и годовая оценки — дань традиции.

Вопросы

1 Дайте определение среднего арифметического числового набора.

2 Чему равно среднее арифметическое числового набора, все числа в котором одинаковы и равны 5,6?

3 Как можно описать среднее арифметическое с точки зрения физики?

4 Может ли среднее арифметическое числового набора быть больше, чем наибольшее значение в наборе; меньше, чем наименьшее?

В редакторах электронных таблиц на персональных компьютерах для вычисления среднего арифметического предусмотрена специальная функция

СРЗНАЧ()

На рисунке показан пример вычисления среднего значения массива из четырёх чисел.

fx =СРЗНАЧ(C1:C4)

C	D	E
1		
9		
5		
6	Среднее	5,25

Задачи

41 Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 8 и 10; б) 8, 9 и 10.

42 Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 3, 9 и 27; б) 6, 10, 16 и 20.

Сколько из данных чисел меньше среднего значения; больше среднего значения?

43 Придумайте какие-нибудь четыре разных числа, среднее арифметическое которых равно:

а) второму по величине числу;

б) третьему по величине числу;

в) полусумме второго и третьего по величине из этих чисел.

44 Придумайте какие-нибудь пять разных чисел, у которых среднее значение:

а) больше четырёх чисел, но меньше пятого;

б) больше первого числа, но меньше остальных четырёх.

45 Найдите среднее значение набора чисел, не вычисляя их сумму:

а) 13, 14, 15, 16, 17; г) 20, 25, 30, 35, 40;

б) 16, 17, 18, 19, 20; д) 22, 24, 26, 28, 30;

в) 21, 22, 23, 24, 25; е) 102, 104, 106, 108, 110.

46 Сергею нужно было найти среднее арифметическое всех натуральных чисел от 1 до 100. Он вычислил его так:

$$\frac{1+100}{2}=50{,}5.$$

а) Верно ли Сергей нашёл среднее арифметическое?

б) Приведите пример другого набора чисел, среднее арифметическое которого равно полусумме наименьшего и наибольшего чисел.

в) Приведите пример набора, для которого такой способ вычисления среднего даёт неверный результат.

47 Отметьте числа и их среднее арифметическое на числовой прямой:

а) 1, 2, 3, 4; в) 3, 4, 5, 6;

б) 2, 3, 4, 5; г) 10, 11, 12, 13.

48 Вычислите среднее арифметическое числового набора:

а) 2, 4, 7, 8, 9;

б) 20, 40, 70, 80, 90;

в) 200, 400, 700, 800, 900.

Числовые наборы б) и в) получены из набора чисел а) умножением всех чисел на 10 и на 100. Как средние значения наборов б) и в) можно получить из среднего значения набора а)?

49 Вычислите среднее арифметическое числового набора:

а) 2, 4, 7, 8, 9;

б) 10, 20, 35, 40, 45;

в) 50, 100, 175, 200, 225.

Числовые наборы б) и в) получены из набора чисел а) умножением всех чисел на 5 и на 25. Как средние значения наборов б) и в) можно получить из среднего значения набора а)?

50 В таблице 23 дана урожайность зерновых культур[1] в России за несколько лет.

Таблица 23. **Урожайность зерновых культур в России**

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Урожайность зерновых, ц/га	22,7	18,3	22,4	18,3	22,0	24,1	23,7	26,2	29,2	27,2

а) Пользуясь таблицей 23, найдите среднюю урожайность зерновых культур в России за пять лет: с 2009 по 2013 г.

б) Найдите среднюю урожайность зерновых культур в России за пять лет: с 2014 по 2018 г.

в) Сравните среднюю урожайность за первые пять лет (2009—2013) и за следующие пять лет (2014—2018). Сильно ли различаются между собой эти средние значения, с вашей точки зрения?

51 а) Найдите среднюю урожайность зерновых культур в России за весь период с 2009 по 2018 г. по данным таблицы 23.

б) Назовём год из данного периода (см. табл. 23) **годом средней урожайности**, если урожайность зерновых в этот год отличается от средней менее чем на 5%. Какие годы были годами средней урожайности?

в) Назовём год из данного периода (см. табл. 23) **низкоурожайным**, если урожайность зерновых в этот год ниже средней больше чем на 10%. Какие годы были низкоурожайными? Каковы, по вашему мнению, причины низкой урожайности в эти годы?

52 В таблице 24 показано число жителей шести крупнейших городов Московской области (с населением более 200 тыс. чел.) в разные годы. Города перечислены в алфавитном порядке.

Таблица 24. **Население крупнейших городов Московской области, тыс. чел.**

Город \ Год	1959	1970	1979	2002	2010	2019
Балашиха	58,6	92,3	117,9	147,9	215,5	490,0
Королёв	41,4	105,9	133,5	142,6	183,4	224,5
Люберцы	93,3	139,4	159,6	156,7	172,6	207,3
Мытищи	98,7	118,7	140,7	159,9	173,2	222,7
Подольск	129,4	168,7	201,8	181,0	188,0	304,2
Химки	47,8	85,0	118,0	141,0	207,4	254,8

Найдите среднее число жителей крупнейших городов Московской области:

а) в 1959 г.; б) в 1970 г.; в) в 2010 г.; г) в 2019 г.

53 Назовём подмосковный город из таблицы 24 очень крупным, если численность населения в нём выше средней численности населения шести крупнейших городов области. Какие подмосковные города были очень крупными:

а) в 1959 г.; б) в 2019 г.?

Чем, по вашему мнению, можно объяснить изменение списка очень крупных городов?

[1] Урожайность зерновых культур — масса зерна, полученная с одного гектара посевов.

8 Медиана

В предыдущем пункте мы сказали, что среднее арифметическое хорошо описывает массивы однородных данных. Что делать, если в числовом наборе, который мы изучаем, встречаются **выбросы**, то есть одно или несколько чисел, которые намного больше или намного меньше всех остальных? В таких случаях в качестве центральной меры часто используют **медиану**.

ПРИМЕР 1. Возьмём какой-нибудь набор различных чисел, например: 4, 9, 1, 7, 11. Сначала упорядочим набор по возрастанию: 1, 4, 7, 9, 11. Упорядоченный набор называется **вариационным рядом**. Теперь найдём число, которое стоит посередине. Это число 7. Число 7 — медиана этого набора.

В этом примере набор состоял из пяти чисел. Медианой в этом случае оказывается число, стоящее в точности посередине.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим набор 1, 3, 6, 11. Числа уже упорядочены, но их четыре, поэтому среди них нет числа, стоящего точно посередине. Возьмём два числа, стоящих посередине. Это числа 3 и 6. Любое из них, а также любое число между ними можно взять в качестве медианы. Чаще всего в качестве медианы берут среднее арифметическое двух центральных чисел: $\frac{3+6}{2}=4{,}5$. Обобщим эти два примера и сформулируем общее правило.

> Чтобы найти медиану числового массива, нужно выполнить следующие действия.
> 1. Упорядочить массив по возрастанию. Получится вариационный ряд.
> 2. Если в массиве нечётное количество чисел, то медианой является число, стоящее посередине вариационного ряда.
> 3. Если в массиве чётное количество чисел, то медианой обычно считают среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

В пункт 3 следует внести поправку: если в массиве чётное количество чисел, то медиан у такого массива много — два срединных числа и все числа, заключённые между ними. Дадим теперь точное определение медианы.

> **Медианой числового массива** называют такое число m, что хотя бы половина чисел массива не больше числа m и хотя бы половина чисел массива не меньше числа m.

ПРИМЕР 3. С помощью определения покажем, что число 6 является медианой числового набора

$$1,\ 6,\ 3,\ 2,\ 0,\ 4,\ 9,\ 12,\ 8,\ 6.$$

Всего в наборе 10 чисел, поэтому число 6 будет медианой, если в наборе найдутся 5 (или больше) чисел, которые не больше числа 6, а также найдутся 5 (или больше) чисел, которые не меньше числа 6.

Не будем упорядочивать числа, а просто подчеркнём все числа, которые не больше числа 6, а над всеми числами, которые не меньше числа 6, поставим черту сверху (надчеркнём их):

$$\underline{1},\ \overline{\underline{6}},\ \underline{3},\ \underline{2},\ \underline{0},\ \underline{4},\ \overline{9},\ \overline{12},\ \overline{8},\ \overline{\underline{6}}.$$

Обратите внимание: число 6 входит и в одно, и в другое множество — оно и подчёркнуто, и надчёркнуто одновременно.

Всего мы сделали 7 подчёркиваний и 5 надчёркиваний. Значит, в этом наборе 7 чисел, не бо́льших чем 6, и 5 чисел, которые не меньше чем 6. Требование определения выполнено, поэтому число 6 является медианой.

Определение точно говорит, что такое медиана, но использовать его для поиска медианы неудобно. Чтобы найти медиану, нужно действовать уже известным нам способом: упорядочить числа и найти одно или два числа, стоящие посередине вариационного ряда.

Пусть всего в ряду n чисел.

— Если n нечётно, то медианой будет число с порядковым номером $\frac{n+1}{2}$.

— Если n чётно, то медианой будет любое из чисел с номерами $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$ или любое число между ними (чаще всего в качестве медианы берут среднее арифметическое этих чисел).

Мы сказали, что медиана часто используется тогда, когда нарушена однородность данных, то есть в массиве имеются выбросы. Чем же хороша медиана в таких случаях? Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 4. В 2021 г. в России было 15 городов с числом жителей более 1 млн человек. Данные о населении этих городов приведены в таблице 25.

Таблица 25. Численность населения городов-миллионеров в России, тыс. чел.

Город \ Год	2010	2021
Волгоград	1021	1004
Воронеж	890	1050
Екатеринбург	1350	1495
Казань	1144	1257
Красноярск	974	1092
Москва	11 504	12 655
Нижний Новгород	1251	1244
Новосибирск	1474	1620
Омск	1154	1139
Пермь	991	1049
Ростов-на-Дону	1089	1137
Самара	1165	1144
Санкт-Петербург	4880	5384
Уфа	1062	1125
Челябинск	1130	1187
Итого	31 079	33 582

Предположим, что мы хотим описать население российского города-миллионера одним числом. Найдём среднее арифметическое:

$$\frac{33\,582}{15} \approx 2239 \text{ тыс. чел.}$$

Обратите внимание: в таблице нет города, население которого было бы близко к получившемуся среднему. В большинстве городов население лишь немного превышает 1 млн человек. Исключение составляют Москва и Санкт-Петербург. Данные о населении Москвы и Санкт-Петербурга в этом массиве можно рассматривать как выбросы. Из-за этих двух значений среднее арифметическое оказалось намного больше, чем население типичного города-миллионера. Значит, среднее арифметическое не даёт верного представления о населении типичного крупного города России. Лучше использовать медиану.

Упорядочим значения:

1004 1049 1050 1092 1125 1137 1139 1144 1187 1244 1257 1495 1620 5384 12 655

Медианой является восьмое по порядку значение (выделено): 1144 тыс. чел. Это население г. Самары. Можно сказать, что Самара — медианный по численности город-миллионер в 2021 г., или **медианный представитель** данного набора.

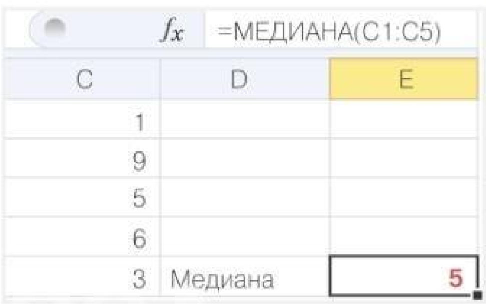
Мы увидели главное достоинство медианы — **устойчивость относительно выбросов**, то есть отдельных сильно выделяющихся значений. Если в наборе есть выбросы, то среднее арифметическое может не очень хорошо описывать большинство чисел. Медиана в таких случаях лучше описывает набор, чем среднее арифметическое.

Медиана имеет не только достоинства, но и недостатки. И дело не только в том, что для поиска медианы приходится упорядочивать набор. Гораздо существеннее, что приходится отбрасывать все значения, кроме одного-двух. Таким образом, теряется много полезной информации о массиве данных.

Чтобы найти медиану массива данных в электронных таблицах, удобно использовать функцию

МЕДИАНА()

На рисунке показан пример нахождения медианы.



Вопросы

1 В каких случаях среднее арифметическое не очень хорошо описывает большинство значений в числовом наборе? Приведите пример таких данных.

2 Дайте определение медианы числового набора.

3 В упорядоченном по возрастанию числовом наборе 19 чисел. Каким по счёту числом является медиана в этом наборе?

4 В упорядоченном по возрастанию числовом наборе 24 числа. Между какими двумя числами (по счёту) заключена медиана этого набора?

5 Что такое выброс?

6 В чём главное достоинство медианы как центральной меры?

Задачи

54 Найдите медиану и среднее арифметическое чисел:

а) 1, 3, 5, 7, 9; в) 1, 3, 5, 7, 9, 11;

б) 1, 3, 5, 7, 14; г) 1, 3, 5, 7, 9, 17.

55 Отметьте числа наборов и их медианы на числовой прямой:

а) 8, 11, 3; б) 7, 4, 8, 1, 5; в) 10, 3, 9, 8, 4, 5, 7.

56 Отметьте числа наборов и их медианы на числовой прямой:

а) 9, 11, 3, 17; б) 7, 4, 8, 1, 5, 6; в) 11, 3, 9, 8, 13, 4, 5, 7.

57 Найдите медиану набора чисел:

а) 11, 3, 21, 4, 17;

б) 25, 17, 19, 28, 18;

в) 25, 50, 25, 29, 27, 40, 28.

58 Найдите медиану набора чисел:

а) 9, 2, 8, 4;

б) 8, 9, 5, 7, 1, 3;

в) 12, 11, 18, 10, 22, 17, 11, 14.

59 Пользуясь таблицей 4 (с. 9), найдите медиану величины «время забега на 100 м» и медианных представителей, то есть бегунов, которые показали время, наиболее близкое к медианному значению.

60 Пользуясь таблицей 19 (с. 24), найдите медиану величины «площадь поверхности океана» и медианного представителя.

61 Пользуясь таблицей 24 (с. 35), ответьте на вопросы.

а) На сколько изменилось среднее число жителей крупнейших городов России к 2021 г. по сравнению с 2010 г.? Можно ли считать, что средняя численность населения выросла за эти одиннадцать лет?

б) Найдите медиану числа жителей городов в 2010 г. Сравните её с медианой, вычисленной для 2021 г. Найдите медианных представителей в эти годы.

62 Рассмотрите данные о числе жителей крупнейших городов России (см. табл. 25), исключив Москву и Санкт-Петербург.

а) Вычислите среднее значение числа жителей этих городов в 2021 г.

б) Вычислите медиану числа жителей этих городов в 2021 г.

в) Сильно ли, с вашей точки зрения, различаются медиана и среднее значение?

63 В таблице 23 (с. 35) даны сведения об урожайности зерновых культур в России в 2009—2018 гг. Найдите медиану урожайности и среднюю урожайность зерновых культур в России за период:

а) 2009—2018 гг.; б) 2009—2013 гг.; в) 2014—2018 гг.

Сравните между собой медиану и среднее за каждый период. Значительно ли, с вашей точки зрения, они отличаются друг от друга?

64 Средний рост учащихся в классе — 165 см. Медиана роста равна 168 см.

а) Обязательно ли не меньше половины учеников выше 165 см?

б) Обязательно ли не меньше половины учеников выше 168 см?

в) Обязательно ли найдётся в этом классе ученик ростом больше 165, но меньше 168 см?

г) Обязательно ли найдётся в этом классе ученик, рост которого ровно 168 см?

9 Наименьшее и наибольшее значения. Размах

Наименьшее и наибольшее значения

Иногда нужны не только среднее арифметическое или медиана, но и другие значения, характеризующие набор данных, например **наибольшее** и **наименьшее значения**.

Если мы хотим узнать, кто победил в соревнованиях по прыжкам в длину, то выберем того, кто прыгнул дальше всех, то есть выберем наибольший результат. Напротив, в соревнованиях по бегу победителем считается тот, кто пробежал быстрее всех, то есть пробежал дистанцию за наименьшее время.

Нам всегда интересно, какова наименьшая цена на нужный товар. Увидев новый автомобиль, мы интересуемся, какова его максимальная скорость. Иногда стремление к рекордам возникает в самых неожиданных ситуациях. В Книге рекордов Гиннесса можно найти и забавные достижения: кто дольше всех простоял на одной ноге, кто выпустил больше всего мыльных пузырей, у кого самый длинный нос и т. п.

ПРИМЕР 1. Во время подготовки к соревнованиям четыре спортсмена устроили мини-турнир по прыжкам в длину с места. Каждый из них сделал по пять попыток. Все результаты занесены в таблицу 26. Кроме того, в ней указаны средние результаты, а также наилучший и наихудший прыжки каждого спортсмена.

Таблица 26. **Результаты прыжков в длину с места, см**

Номер прыжка	Пётр	Иван	Алексей	Сергей
1	215	197	203	208
2	228	205	212	234
3	208	212	227	240
4	236	241	205	212
5	205	233	215	203
Среднее значение	218,4	217,6	212,4	219,4
Наибольшее значение	236	241	227	240
Наименьшее значение	205	197	203	203

Как вы думаете, почему результаты в разных попытках у одного и того же спортсмена разные? Какие из следующих факторов могут влиять на результат: удача; техника прыжка; рост; масса; тренированность; настроение; плотный обед; усталость; ветер; обувь? Какие ещё факторы могут повлиять на дальность прыжка?

Самое большое среднее значение прыжка у Сергея. По этому показателю Иван лишь третий. Но рекордсменом всё же стал Иван: в одной из попыток он прыгнул дальше всех.

Во многих спортивных дисциплинах принято учитывать только лучший показатель.

Тем не менее тренеру есть над чем задуматься: если упорядочить прыгунов по лучшему прыжку и по среднему значению, то получаются два разных упорядочивания. Сегодня лучшим был Иван, но Сергей уступает лишь немного, а в среднем он прыгает лучше. Кроме того, худший результат сегодня показал тоже Иван. Не исключено, что на соревнованиях лучше прыгнет Сергей.

Наибольшие и наименьшие значения важны не только в спорте.

ПРИМЕР 2. Каждая судоходная река имеет **фарватер** (судовой ход) — часть русла, где возможно движение судов. Течение несёт с собой песок и ил, глубины на разных участках фарватера меняются, поэтому их приходится промерять несколько раз в год. Каждый раз составляется список глубин, которые наносятся на карту. Важно знать наименьшую глубину, чтобы понять, может ли судно пройти этот участок реки.

ПРИМЕР 3. В Санкт-Петербурге за всё время наблюдений с 1706 г. случилось более 300 наводнений. Самый высокий уровень воды (421 см выше **ординара**[1]) зарегистрирован 7 ноября 1824 г. Это наводнение описано в поэме А. С. Пушкина «Медный всадник».

В Санкт-Петербурге наблюдения за уровнем воды в Неве ведутся всё время. Наивысший известный уровень воды учитывается при строительстве набережных, дамб, мостов не только в Санкт-Петербурге, но и в любом другом месте, где существует опасность наводнения.

Во многих случаях наибольшее и наименьшее значения — неудачные характеристики. Они часто не являются типичными (вспомните пример с населением городов-миллионеров, где Москва и Санкт-Петербург сильно выбиваются из общего ряда). Иногда наибольшее и наименьшее значения оказываются попросту ошибочными. Ошибка, например, может возникнуть при вводе данных в компьютер.

ПРИМЕР 4. В таблице 27 собраны данные о росте учащихся класса.

Наибольший рост у Евсеевой — 1154 см! Больше чем 11 метров! Ясно, что это измерение — выброс, получившийся по ошибке. Скорее всего, кто-то при вводе данных в компьютер случайно нажал лишнюю единицу. Лучше не гадать, как получилось такое значение, а исключить его вовсе. Тогда наибольшее значение станет равно 167 см.

Таблица 27. **Рост школьников**

Фамилия	Рост, см	Фамилия	Рост, см	Фамилия	Рост, см	Фамилия	Рост, см
Алексеев	156	Вольский	158	Евсеева	1154	Коваль	154
Андреева	159	Гетманов	161	Железов	167	Петровская	149
Борисов	162	Добромыслов	156	Завидов	163	Юсуфов	165

Посмотрим на медиану. До исключения ошибочной записи медиана равнялась 160 см, а после исключения стала равна 159 см (проверьте).

Этот пример показывает неустойчивость наибольшего и наименьшего значений и ещё раз иллюстрирует устойчивость медианы.

Измерение рассеивания данных с помощью размаха

Часто нужно знать не только среднее значение в наборе данных, но и иметь представление о том, как сильно значения разбросаны, рассеяны. Самой простой характеристикой, описывающей **рассеивание** данных, является **размах**.

[1] Ординар — средний многолетний уровень воды в водоёме.

Размах числового массива — это разность между наибольшим и наименьшим значениями.

ПРИМЕР 5. Вспомним таблицу 22 с ценами на один и тот же смартфон в разных магазинах. Наибольшая цена 8590 р., а наименьшая — 7790 р. Размах цен в этом массиве данных равен 8590 – 7790 = 800 р., то есть меньше, чем 10% средней цены, которая равна 8150 р.

Размах — очень простая и наиболее употребительная мера рассеивания. Но для вычисления размаха используются только наименьшее и наибольшее значения, которые неустойчивы. Поэтому и размах — неустойчивая мера.

ПРИМЕР 6. Вернёмся к примеру 4, где у ученицы Евсеевой рост 1154 см. До удаления этого ошибочного значения размах был равен 1005 см, а после удаления он стал 18 см (проверьте).

Наибольшее и наименьшее значения нередко попадают в набор данных по ошибке. Начиная работать с данными, полезно обратить внимание на наибольшее и наименьшее значения — правдоподобны ли они?

Для поиска наименьшего и наибольшего значений в электронных таблицах есть функции

МИН() и МАКС()

Чтобы найти размах, нужно вычислить разность:

= МАКС() – МИН()

f_x =МАКС(C1:C5)-МИН(C1:C5)

C	D	E	F
1			
9			
5	Наим.	1	
6	Наиб.	9	
3	Размах	8	

Вопросы

1 Приведите примеры данных, для описания которых лучше использовать наибольшее значение, чем среднее или медиану.

2 Приведите примеры данных, для описания которых лучше использовать наименьшее значение, чем среднее или медиану.

3 Что такое размах числового набора?

Задачи

65 Найдите наибольшее и наименьшее значения, размах, среднее значение и медиану набора чисел:

а) 12, 7, 25, 3, 19, 15;   б) 17, 19, 5, 41, 47, 13, 19.

66 Пользуясь таблицей 2 (с. 8), укажите:

а) самый большой по числу жителей в 2021 г. город России;

б) второй по населению город в России в 2021 г.;

в) третий и четвёртый по числу жителей города в России в 2010 г.

67 В таблице 28 приведены данные о производстве зерновых культур в России в 2011—2020 гг.

Таблица 28. **Производство зерновых культур в России**

Год	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Производство зерновых, млн т	94,2	70,9	92,4	105,2	104,7	120,7	135,5	113,2	120,6	133,0
Урожайность зерновых, ц/га	22,4	18,3	22,0	24,1	23,7	26,2	29,2	27,2	26,6	28,6

Найдите наибольшее, наименьшее значения и размах:

а) производства зерновых культур;

б) урожайности зерновых культур.

68 При сборке автомобильного двигателя нужно добиться того, чтобы все поршни двигателя имели одинаковую массу (размах должен быть не более 0,1 г). Увеличить массу поршня нельзя, зато её можно уменьшить, высверливая углубления в специальных местах поршня. В таблице 29 показаны массы 8 поршней для одного двигателя.

а) Определите размах масс поршней.

б) Какой поршень не требует доработки?

Таблица 29. **Массы поршней**

Поршень	1	2	3	4	5	6	7	8
Масса, г	124,4	124,8	125,2	123,9	124,1	125,4	125,2	124,8

69 В таблице 30 даны результаты измерения температуры тела пациента в больнице.

Таблица 30. **Измерение температуры**

Время	7 ч	9 ч	11 ч	13 ч	15 ч	17 ч	19 ч	21 ч
t, °C	38,3	39,2	39,2	39,4	39,1	38,7	381	38,2

а) Найдите наибольшее значение температуры, размах, среднее арифметическое и медиану температуры.

б) Найдите явно ошибочное значение. Как оно могло получиться?

в) Исключите ошибочное значение и найдите наибольшее значение температуры, размах, среднее арифметическое и медиану температуры после исключения ошибки.

г) На сколько градусов изменился размах после исключения ошибки?

д) На сколько изменилось среднее значение после исключения ошибки?

е) На сколько градусов изменилась медиана после исключения ошибки?

70 Как изменится размах числового набора, если:

а) к каждому числу набора прибавить 5;

б) от каждого числа набора отнять 3?

71 Как изменится размах числового набора, если:
а) наименьшее число набора уменьшить на 50;
б) наибольшее число набора увеличить на 100?

72 Все числа в наборе положительны. Как изменится размах числового набора, если:
а) каждое число набора разделить на 5;
б) каждое число умножить на 3?

73 Все числа в наборе отрицательны. Как изменится размах числового набора, если:
а) каждое число набора разделить на 5;
б) каждое число умножить на 3?

10* Обозначения в статистике. Свойства среднего арифметического

Обозначения

Данные в статистических массивах часто приходится обозначать буквами. Использовать отдельную букву для каждого числа невозможно. Поэтому для чисел одного массива обычно используют одну и ту же букву с **индексами** — номерами. Можно рассмотреть набор X, в котором пять чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, или набор Y, состоящий из чисел y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, и т. п. Чтобы подчеркнуть, что числа образуют один набор, иногда записывают значения в фигурных скобках.

ПРИМЕР. Набор чисел 1, 8, 3, 0, –3 можно обозначить X и записать: $X = \{1, 8, 3, 0, -3\}$. В этом наборе $x_1 = 1$, $x_2 = 8$ и так далее до $x_5 = -3$.

Если чисел в наборе много, то вместо слов «и так далее до» используют многоточие. Например, набор X, в котором 100 чисел, записывают так:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{100}\}.$$

Среднее арифметическое чисел набора принято обозначать $\overline{x}$. Например, среднее арифметическое набора, в котором пять чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, запишется так:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5},$$

а среднее арифметическое набора X, состоящего из n чисел, можно записать, используя многоточие:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Для наименьшего значения набора обычно используется обозначение min, а для наибольшего — max (от лат. *minimum* и *maximum*). Таким образом, можно записать:

$$\min\{2, 4, 1, 5\} = 1, \max\{2, 4, 1, 5\} = 5.$$

Если набор $\{2, 4, 1, 5\}$ обозначить буквой X, то можно записать короче:

$$\min X = 1, \max X = 5.$$

Обозначения не только укорачивают запись, но и делают её ясной, однозначной и строгой.

Для некоторых описательных характеристик нет общепринятых обозначений. Например, нет общепринятого обозначения для медианы числового массива.

Свойства среднего арифметического

Буквенные обозначения позволяют записать и доказать свойства среднего арифметического числового массива.

Свойство 1. Если каждое число набора увеличить (уменьшить) на одно и то же число a то среднее арифметическое набора увеличится (уменьшится) на это же число a.

Аналогичное свойство верно для умножения.

Свойство 2. Если каждое число набора умножить на одно и то же число b, то среднее арифметическое набора также умножится на число b.

Докажем эти свойства на примере массива из четырёх чисел:

$$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}.$$

Прибавим к каждому значению число a. Получится набор

$$\{x_1 + a,\ x_2 + a,\ x_3 + a,\ x_4 + a\}.$$

Нужно показать, что среднее арифметическое нового массива равно $\overline{x} + a$. Найдём среднее арифметическое:

$$\frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + (x_3 + a) + (x_4 + a)}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4a}{4}.$$

Разобьём дробь на два слагаемых:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} + \frac{4a}{4}.$$

Первое слагаемое равно $\overline{x}$ — среднему арифметическому первоначального набора X. Второе слагаемое равно a. Получается, что среднее арифметическое нового массива равно $\overline{x} + a$.

Покажем теперь, что верно свойство 2. Умножим каждое число набора X на число b. Нужно показать, что среднее арифметическое нового набора bx_1, bx_2, bx_3, bx_4 равно $b\overline{x}$.

Вычислим среднее арифметическое нового набора:

$$\frac{bx_1 + bx_2 + bx_3 + bx_4}{4} = \frac{b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{4} = b \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = b\overline{x}.$$

Доказательство окончено.

Вопросы

1. Как называются номера в обозначениях x_5, y_2 и т. п.?
2. Как обозначается среднее арифметическое, наименьшее и наибольшее значения?
3. Сформулируйте свойство 1 среднего арифметического.
4. Сформулируйте свойство 2 среднего арифметического.

Задачи

74 Дан числовой набор X, состоящий из чисел 17, 3, 6, 21, 15.

а) Чему равно x_2 в этом наборе? б) Чему равно x_5?

75 Среднее арифметическое числового набора X равняется 5. Найдите среднее арифметическое числового набора, который получится, если:

а) ко всем числам набора X прибавить число 4;

б) из всех чисел набора X вычесть число 12;

в) ко всем числам набора X прибавить число 8;

г) из всех чисел набора X вычесть число 3.

76 Среднее арифметическое числового набора Y равняется 8. Найдите среднее арифметическое числового набора, который получится, если все числа набора Y:

а) умножить на число 2; в) умножить на -3;

б) разделить на 4; г) разделить на -3.

77 Сначала ко всем числам числового набора X прибавили число 8, а затем все полученные числа умножили на 3. Найдите среднее арифметическое получившегося набора, если среднее арифметическое набора X равно:

а) 2; б) -4; в) 5,2; г) $-9{,}1$.

78 Сначала все числа числового набора X умножили на 3, а затем к каждому полученному числу прибавили 8. Найдите среднее арифметическое получившегося набора, если среднее арифметическое набора X равно:

а) 2; б) -4; в) 5,2; г) $-9{,}1$.

79 Средняя цена нефти на протяжении месяца составляла 65 долл. за один **баррель** (мера объёма, равная 158,9873 л.). Найдите среднюю цену одного литра нефти за этот период, считая, что в одном барреле 159 л.

80 Средняя зарплата на предприятии составляла 56 000 р. С нового года зарплату всем сотрудникам проиндексировали (повысили) на 4%. Других изменений не было. Найдите среднюю зарплату после индексации.

81 В наборе n чисел. На сколько увеличится среднее арифметическое этого набора, если одно число в этом наборе увеличить на 1?

82 В наборе было 100 чисел, а сумма всех чисел равнялась 134. К набору добавили ещё одно число, при этом среднее арифметическое не изменилось. Какое число добавили?

83 Каждое число набора увеличили на одно и то же число a. Как изменились наименьшее и наибольшее значения набора?

84 Наименьшее значение набора равно m, наибольшее значение равно M. Каждое число набора умножили на одно и то же число b. Найдите наименьшее и наибольшее значения получившегося набора, если: а) $b > 0$; б) $b < 0$.

85 В наборе было n чисел, их среднее арифметическое равнялось $\overline{x}$. К набору добавили число a. Запишите выражение для среднего арифметического получившегося набора.

86 Студент в течение семестра выполнил несколько контрольных работ. Когда он узнал результаты всех работ, кроме последней, он заметил, что если за последнюю контрольную работу он получит 90 баллов, то средний балл за все работы будет равен 84, а если за последнюю работу он получит 72 балла, то средний балл за все работы составит 81. Сколько всего контрольных работ должен выполнить студент?

III Случайная изменчивость

Неизменные величины в жизни встречаются крайне редко. Даже те величины, которые считаются постоянными, обычно подвержены изменчивости. Помимо закономерной изменчивости почти всегда присутствует разнонаправленная случайная изменчивость, причины которой известны частично, а порой неизвестны вовсе.

В этой главе мы обсудим несколько важных примеров изменчивости, которую приходится учитывать в повседневной жизни. Кроме того, мы увидим, как разные виды изменчивости отражаются на диаграммах.

11 **Примеры случайной изменчивости**

12 **Точность и погрешность измерений**

13 **Тенденции и случайные отклонения**

14 **Частоты значений в массивах данных**

15 **Группировка данных и гистограммы**

16 **Выборка**

17* **Статистическая устойчивость и оценки с помощью выборки**

11 Примеры случайной изменчивости

В природе неизменные величины встречаются очень редко. Большинство величин подвержены **случайной изменчивости**. Иногда мы можем указать причины изменений. Иногда причины изменчивости известны частично, а порой неизвестны вовсе.

Колебания напряжения в электрической сети

В таблице 31 даны результаты 25 измерений напряжения в бытовой электросети. Все измерения сделаны днём, в случайно выбранные моменты.

Таблица 31. **Измерения напряжения в бытовой сети, В**

225	225	227	225	228
228	218	217	218	223
225	216	222	220	218
221	220	214	219	231
228	227	220	224	216

В России **номинальное**[1] напряжение в бытовых сетях 220 В (вольт). Напряжение в сети редко равно в точности 220 В. Оно колеблется. Напряжение понижается, если в вашей квартире или у соседей включаются электроприборы. Моменты включения и выключения электрических приборов случайные, и потому колебания напряжения тоже случайные.

Кроме того, производитель электроэнергии не может обеспечить напряжение в точности 220 В, а при транспортировке электричества по линиям электропередач неизбежны потери, которые тоже непостоянны.

Электрические приборы в России рассчитаны на колебания напряжения в определённых пределах. Если вы посмотрите на заднюю панель микроволновой печи или холодильника, вы найдёте табличку, где написан интервал рабочего напряжения. Например, от 190 до 250 В. Если напряжение выходит за эти пределы, прибор может выйти из строя. Поэтому в некоторых случаях люди используют стабилизаторы напряжения, которые сглаживают колебания напряжения.

Урожайность зерновых культур

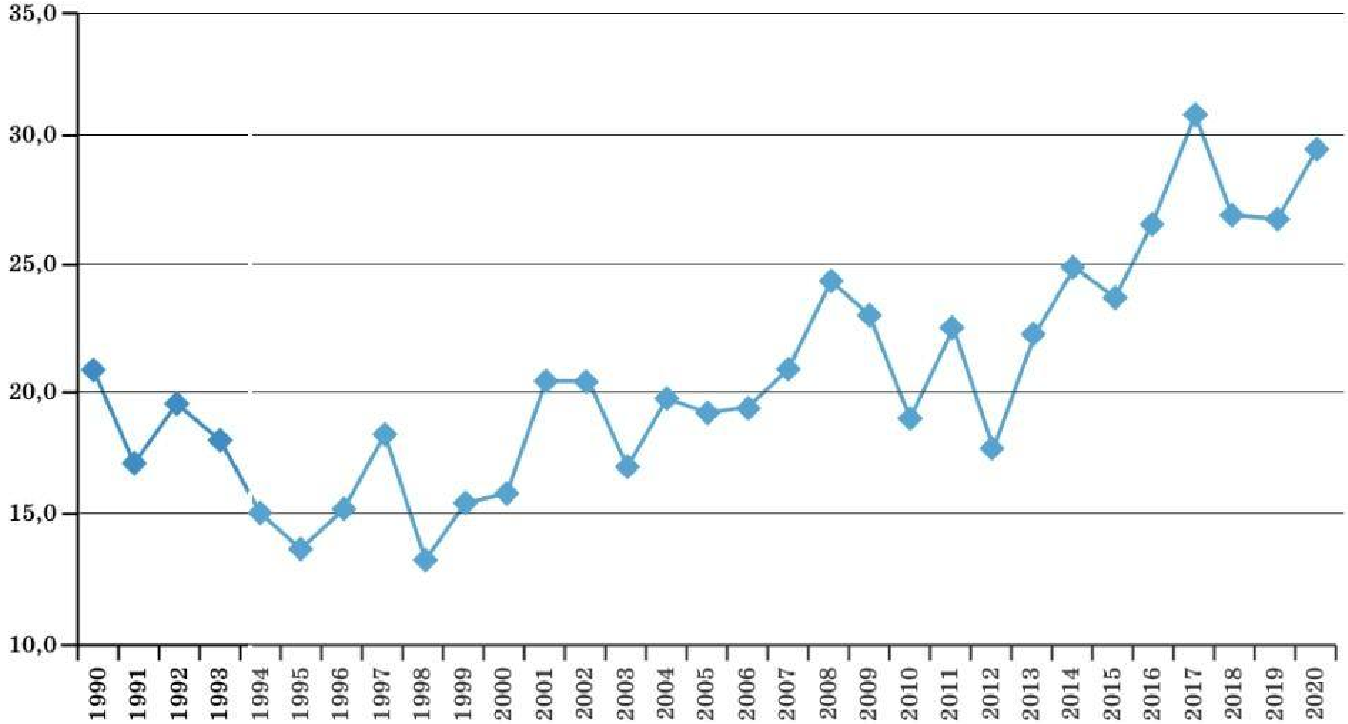
Урожайность зерновых культур — это средняя масса зерна, полученного с одного засеянного гектара. Это важный экономический показатель, который отражает эффективность сельского хозяйства.

На диаграмме 16 видно, что урожайность — очень изменчивая величина. Большое влияние оказывают погодные условия, которые год от года разные.

Но кроме погоды, урожайность зависит от усилий людей, качества посевного зерна, удобрений, состояния уборочной техники и многих других факторов. Усилия людей по повышению урожайности сказываются постепенно. За счёт улучшения хозяйствования средняя урожайность к нашему времени выросла практически в 2 раза по сравнению с серединой 1990-х гг. и в 3 раза по сравнению с 1950-ми гг.

[1] Номинальное — заявленное, стандартное, то, которое должно быть.

Диаграмма 16. **Урожайность зерновых культур в России, ц/га**



Массовое производство

На обёртке шоколадного батончика написано, что его масса 50 г. Это **номинальная масса**. В таблице 32 даны массы двадцати купленных одинаковых батончиков.

Таблица 32. **Масса шоколадных батончиков, г**

49,1	50,0	49,7	50,5	48,1	50,3	49,7	51,6	49,8	50,1
49,7	48,8	51,4	49,1	49,6	50,9	48,5	52,0	50,7	50,6

Наибольшее значение — 52,0 г, а наименьшее — 48,1 г. Размах — 3,9 г. И только один батончик весит в точности 50 г. Но средняя масса всех двадцати батончиков равна 50,01 г, то есть практически не отличается от номинальной.

Такая ситуация часто встречается при массовом производстве. Если отклонение размера, массы мало отличается от заданного стандарта, то есть находится в пределах **допустимой погрешности**, то изделие считается годным. Оно поступает в продажу или дальнейшее производство. Если отклонение превышает допуск, то изделие считается бракованным.

Невозможно и не нужно контролировать массу каждого отдельного изделия. Достаточно проверять контрольные партии. Большие или систематические отклонения говорят об износе оборудования или о низком качестве сырья. В этих случаях приходится останавливать производство и устранять причину.

Для разных изделий допуски разные. Для продуктов питания допуски могут достигать нескольких граммов, для деталей мебели — 1—2 мм, а для точных изделий, например подшипников, допуски не превышают сотых долей миллиметра.

Вопросы

1 Приведите примеры изменчивых величин, помимо тех, что описаны в тексте учебника.

2 Какие факторы влияют на значение напряжения в электросети в случайный момент времени? Назовите ещё один-два фактора, помимо тех, которые приведены в тексте учебника.

3 Какие факторы влияют на изменчивость урожайности зерновых культур? Назовите ещё один-два фактора, кроме тех, что приведены в тексте учебника.

4 Какие факторы могут влиять на изменчивость массы шоколадного батончика с арахисом?

5 Что больше подвержено изменчивости — масса каждого отдельного шоколадного батончика или средняя масса в партии батончиков?

Задачи

87 Рассмотрите таблицу 31. Найдите наибольшее и наименьшее значения напряжения.

88 Найдите среднее значение и медиану напряжения по данным таблицы 31. Сильно ли эти характеристики, по вашему мнению, отличаются от 220 В?

89 Сколько значений из таблицы 31 превышают номинальное и сколько меньше номинального? Можно ли считать, что шансы событий «напряжение в случайный момент выше 220 В» и «напряжение в случайный момент ниже 220 В» примерно одинаковы?

90 По данным диаграммы 16 найдите средние урожайности зерновых за первые три года и за последние три года. Сравните результаты. На сколько центнеров с гектара средняя урожайность в последние три года превышает среднюю урожайность в первые три года?

91 Рассмотрите таблицу 32. Сколько в купленной партии батончиков массой более 50 г? Какую долю и какой процент они составляют?

92 Масса купленного шоколадного батончика может быть больше или меньше номинальной. Можно ли считать, что шансы этих событий равны, если судить по данным из таблицы 32?

12 Точность и погрешность измерений

Можно точно узнать, сколько учеников в классе, или подсчитать деревья в сквере. Но чаще всего измерения или подсчёты невозможно выполнить абсолютно точно. Возникают неизбежные **погрешности**, то есть случайные отклонения от истинного значения. Главный источник погрешности — изменчивость самой измеряемой величины. Кроме того, измерительный инструмент также обладает погрешностью. Обсудим это подробнее.

Число жителей города

Численность населения крупных городов измеряется обычно в тысячах человек (см. табл. 2 на с. 8). Мы понимаем, что число жителей городов дано приближённо, что истинное число жителей, скорее всего, не равно в точности целому числу тысяч.

Но что такое «истинное число жителей города»? Люди всё время приезжают и уезжают, кто-то умирает, кто-то появляется на свет. Поэтому число жителей города постоянно меняется. Если подсчитывать людей ежедневно в маленьких городах, то различия составят десятки человек, в средних городах — сотни. Но число тысяч людей, населяющих город среднего размера, за день, скорее всего, не изменится. Поэтому данные о населении крупных городов обычно даются в тысячах человек. Более высокая точность не имеет смысла[1].

Рост человека

Когда мы говорим о росте человека, мы округляем данные до сантиметра. Так измеряют рост в России и в континентальной Европе. В США, Великобритании, Австралии и некоторых других странах рост измеряют в **дюймах**. Один дюйм (1") — это примерно 2,54 см.

Рост человека редко равен целому числу сантиметров или дюймов. Казалось бы, можно измерить рост с большой точностью. Но это не нужно, измерение с точностью до сантиметра или дюйма достаточно для практических нужд: пошива одежды, определения размеров мебели, сидений в автомобилях и т. п.

Кроме того, рост человека не остаётся постоянным в течение суток: утром рост человека чуть больше, чем вечером. За день под влиянием нагрузки хрящи в суставах несколько сжимаются, а во время сна вновь расправляются. Поэтому само понятие «рост человека» не очень точно определено.

Расстояние между городами

Мы понимаем, как измерить расстояние между двумя точками вдоль некоторой линии. Но город — это не точка, а обширная территория. К тому же граница города не всегда отчётлива. Поэтому расстояние между городами точно определить нельзя.

В России за расстояние между городами принимают расстояние между их центральными почтовыми отделениями (почтамтами) вдоль главных дорог. Этот способ определения расстояния появился одновременно с регулярной почтовой службой.

Например, протяжённость автомобильной дороги М10 «Россия» между Москвой и Санкт-Петербургом равна 664 км. А длина автомагистрали М11 «Нева» между этими же городами равна 669 км. Железнодорожники считают[2], что между Москвой и Санкт-Петербургом 650 км. Пилоты регулярных рейсов измеряют расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга в соответствии со своим полётным планом, который может меняться даже в ходе полёта[3].

> **!** Выбирать точность измерения изменчивых величин нужно так, чтобы погрешность не влияла на последующие выводы.
> Слишком высокая точность измерения не нужна, а иногда даже вредна. Излишне точные измерения отнимают время, силы и даже могут порождать ошибки.

[1] В данных Российской службы статистики можно встретить измерения численности населения городов с точностью до одного человека. Это объясняется тем, что данные не округляются. При этом обычно указывается метод, с помощью которого проведён пересчёт.

[2] Фактически расстояние составляет 645 км с 2001 г. после спрямления участка около п. Веребье в Маловишерском районе Новгородской области. Официально протяжённость трассы решили не менять. И теперь 204-й км железной дороги граничит с 211-м км.

[3] Схема взлёта и захода на посадку зависит от обстановки в воздухе и направления ветра. Диспетчер может сообщить пилоту об изменениях в любой момент.

Тем не менее измерительные приборы должны обеспечивать необходимую точность. Допустимая погрешность измерительного прибора определяется стандартом.

ПРИМЕР 1. Допустимая погрешность весов зависит от **класса точности** весов. Чем выше класс точности, тем меньше погрешность и тем дороже весы.

Не очень точные весы (III класс точности), которые рассчитаны на груз от 20 до 3000 кг, в соответствии с ГОСТ[1] имеют разные допустимые погрешности при разной нагрузке (табл. 33).

Таблица 33. Допустимая погрешность весов при эксплуатации

Нагрузка, кг	Допустимая погрешность, кг
От 20 до 200	±1
От 200 до 2000	±2
От 2000 до 3000	±3

Знак ± означает, что отклонение возможно в любую сторону — в меньшую или в бо́льшую. Например, если человек массой ровно 65 кг взвешивается на напольных весах, то они могут показать от 64 до 66 кг. Наоборот, если напольные весы показали, что человек имеет массу 65 кг, то истинная масса человека m находится в пределах от 64 до 66 кг. Это удобно записать двойным неравенством

$$64 \text{ кг} \leqslant m \leqslant 66 \text{ кг}.$$

У лабораторных весов допустимые погрешности намного меньше. Например, точные лабораторные весы могут иметь допустимую погрешность всего 0,001 г.

Таблица 34. Допустимая погрешность автомобильного спидометра

Диапазон скорости, км/ч	Допустимая погрешность при $T = 20 \pm 5$ °С, км/ч
0—60	+4
60—80	+5
80—100	+6
100—120	+7
120—140	+8

ПРИМЕР 2. Согласно ГОСТу автомобильный спидометр при температуре окружающего воздуха 20 ± 5 °С не должен иметь погрешности в меньшую сторону, а допустимые погрешности в большую сторону зависят от скорости и указаны в таблице 34. Обратите внимание: погрешность в бо́льшую сторону допускается, а в меньшую — нет. Это сделано для того, чтобы ошибка спидометра не приводила к превышению скорости.

Рисунок 6

До сих пор мы приводили пример **абсолютных погрешностей**. Иногда погрешности измеряются в процентах самой величины. Это **относительные погрешности**. Например, допустимая погрешность длины верёвки или шнура в мотке обычно даётся в процентах.

На рисунке 6 — катушка, на которую намотан шнур. На ярлыке указана длина шнура: 250 м ± 10%. Это значит, что истинная длина шнура находится в пределах от $250 \cdot 0{,}9 = 225$ (м) до $250 \cdot 1{,}1 = 275$ (м). Это можно выразить двойным неравенством

$$225 \text{ м} \leqslant l \leqslant 275 \text{ м}.$$

Здесь l — истинная длина шнура.

[1] ГОСТ (государственный стандарт) — совокупность требований и норм, определяющая свойства и качество продукции.

Вопросы

1 Можно ли совершенно точно определить понятие «численность населения страны»?

2 Приведите несколько факторов, влияющих на изменчивость числа жителей страны. Как вы думаете, зачем нужно знать численность населения страны?

3 Почему размеры готовой мебели обычно указывают в сантиметрах, а не в миллиметрах?

4 Приведите примеры измерений длины, когда точность ±1 мм недостаточна.

5 С какой точностью, на ваш взгляд, следует измерять напряжение в бытовой электросети?

6 Укажите подходящую единицу измерения массы морского судна; железнодорожного вагона; шоколадки; человека.

7 Температуру в России и в большинстве других стран измеряют в градусах Цельсия[1]. Укажите подходящую точность измерения для температуры воздуха в комнате или на улице; тела человека; пламени в газовой плите; температуры на поверхности звезды.

Задачи

93 Рассмотрите таблицу 33. В ней даны допустимые погрешности весов в разных диапазонах измерения. Предположим, что весы исправны и погрешность измерения не выходит за пределы допустимой. Запишите с помощью двойного неравенства границы, в которых находится истинное значение массы m некоторого груза, если при взвешивании этого груза весы показывают:

а) 38 кг; в) 2956 кг;
б) 129 кг; г) 2543 кг.

94 Рассмотрите таблицу 34. Предположим, что автомобильный спидометр исправен. Укажите с помощью двойного неравенства границы истинной скорости v автомобиля, если спидометр показывает:

а) 28 км/ч; в) 96 км/ч;
б) 69 км/ч; г) 127 км/ч.

95 На мотке верёвки указано, что длина верёвки составляет 30 м ± 5%. В каких пределах может быть заключена истинная длина верёвки?

13 Тенденции и случайные отклонения

В п. 11 мы обсуждали напряжение в электрической сети, которое редко бывает равно номинальному значению 220 В. Похожие явления встречаются повсюду.

ПРИМЕР 1. Нормальное атмосферное давление[2] в каждой местности своё: оно зависит от широты, высоты над уровнем моря, от температуры и влажности воздуха и ещё — от случайности.

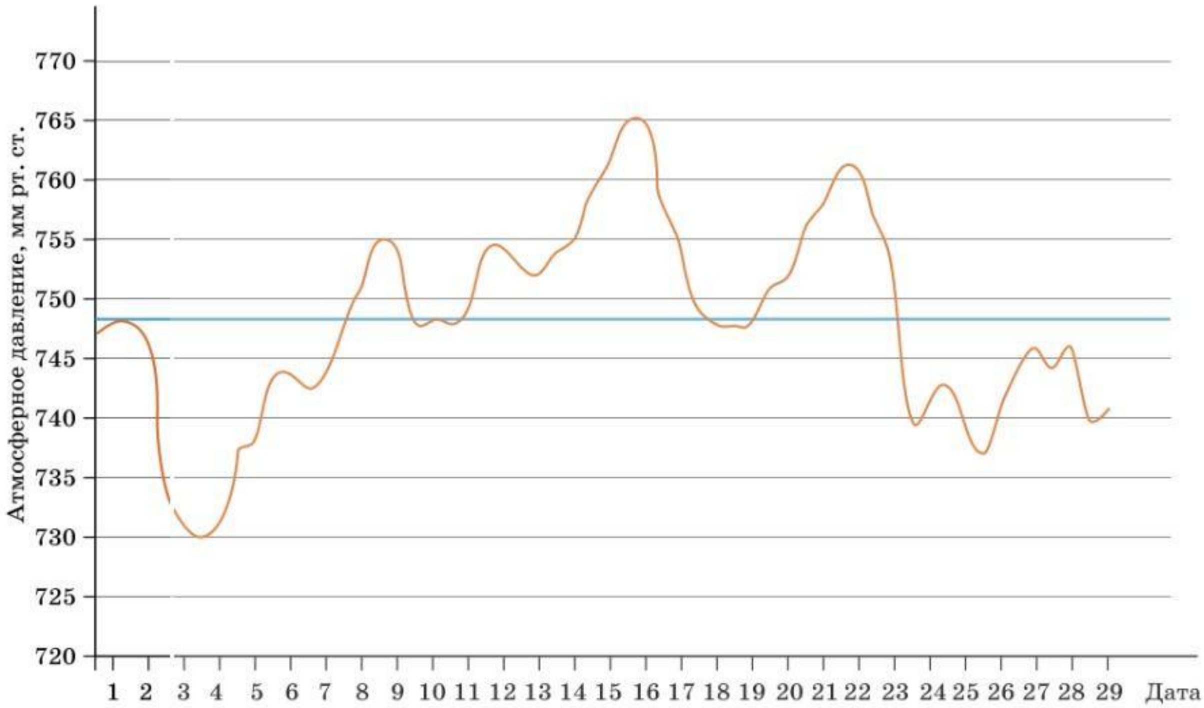
---

[1] В США, Белизе и в нескольких других странах температуру обычно измеряют в градусах Фаренгейта.

[2] На уровне моря в местности с географической широтой 45° при температуре воздуха вблизи земной поверхности 0 °С нормальным считается давление 760 мм рт. ст.

На диаграмме 17 оранжевая линия показывает изменение атмосферного давления на протяжении февраля 2020 г. в г. Ижевске. Давление меняется плавно, непрерывно, поэтому график — непрерывная линия.

Диаграмма 17. Атмосферное давление в Ижевске. Февраль 2020 г.



Синей прямой показано среднее давление 748,4 мм рт. ст. График давления колеблется около среднего значения. При этом само среднее давление случается только в редкие и короткие моменты времени. Можно говорить лишь о бо́льших или меньших отклонениях давления от среднего.

Глядя на причудливую форму графика, можно подумать, что давление воздуха крайне неустойчиво и всё время сильно меняется. Но давайте посмотрим, каков размах данных по отношению к среднему. Наименьшее давление — 730 мм рт. ст., а наибольшее — 765 мм рт. ст. Размах равен 35 мм рт. ст., что составляет $35 : 748{,}4 \cdot 100\% \approx 4{,}7\%$. Получается, что на самом деле давление колеблется вблизи постоянного значения, и изменчивость здесь не очень высокая.

Иногда случайная величина в целом растёт или убывает со временем, при этом испытывая случайные колебания. Говорят, что изменчивость складывается из **тенденции** и случайных колебаний.

Тенденция (тренд) — характерное, устойчивое изменение. Как правило, тенденция обусловлена долгосрочными факторами, которые заставляют величину расти или убывать.

В примере с атмосферным давлением можно сказать, что тенденция в феврале отсутствовала или была нулевой.

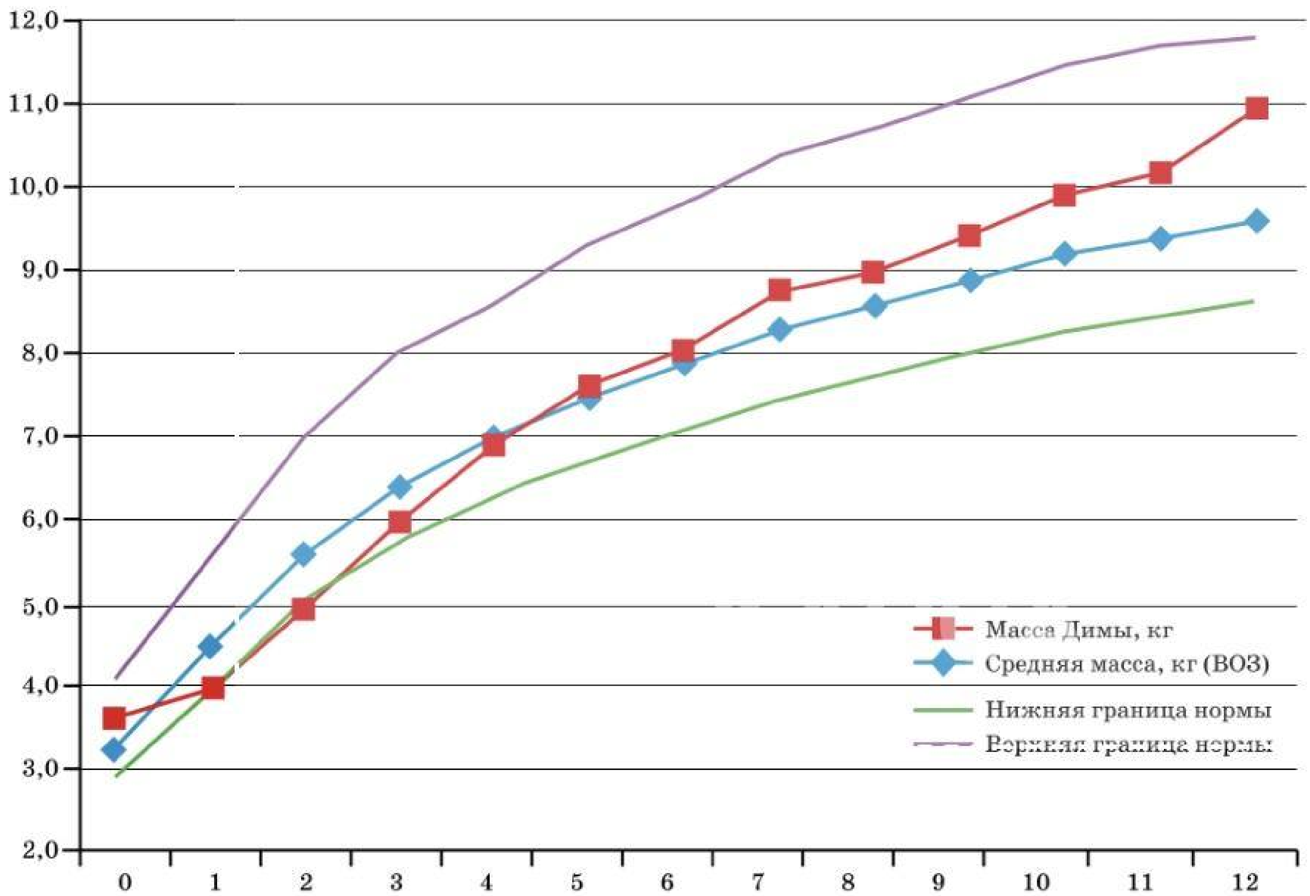
В отличие от тенденции, случайные колебания непредсказуемы, поскольку вызваны кратковременными случайными и разнонаправленными факторами.

ПРИМЕР 2. На диаграмме 18 показано, как растёт масса мальчиков от рождения до года. Эти данные медицинской статистики получены ВОЗ[1] в России за много лет наблюдений. Средняя ожидаемая масса увеличивается плавно — тенденция показана синей линией. Красная линия — масса одного конкретного мальчика по имени Дима по данным ежемесячного взвешивания в районной поликлинике. Дима родился немного тяжелее среднего, но за первый месяц набрал совсем немного и «ушёл ниже среднего». Затем Дима нагнал сверстников, а в конце первого года жизни вдруг резко прибавил почти килограмм. Можно ли считать, что в развитии Димы на первом году жизни были отклонения от нормы?

Каждый ребёнок развивается индивидуально, ежемесячный привес зависит от множества факторов, и практически никогда не следует средним значениям. Границы нормы очень условны, и ни у родителей, ни у врачей опасений по поводу питания или здоровья маленького Димы на первом году жизни не было.

В случае с массой **возрастающая тенденция** определена природой — ребёнок растёт, и масса его тела увеличивается. Но каждый конкретный ребёнок может отставать от тенденции или обгонять её. Эти случайные колебания вызваны индивидуальными особенностями, наследственностью, образом жизни, составом питания и многими другими факторами, часть из которых неизвестна.

Диаграмма 18. **Масса мальчиков от рождения до года, кг**

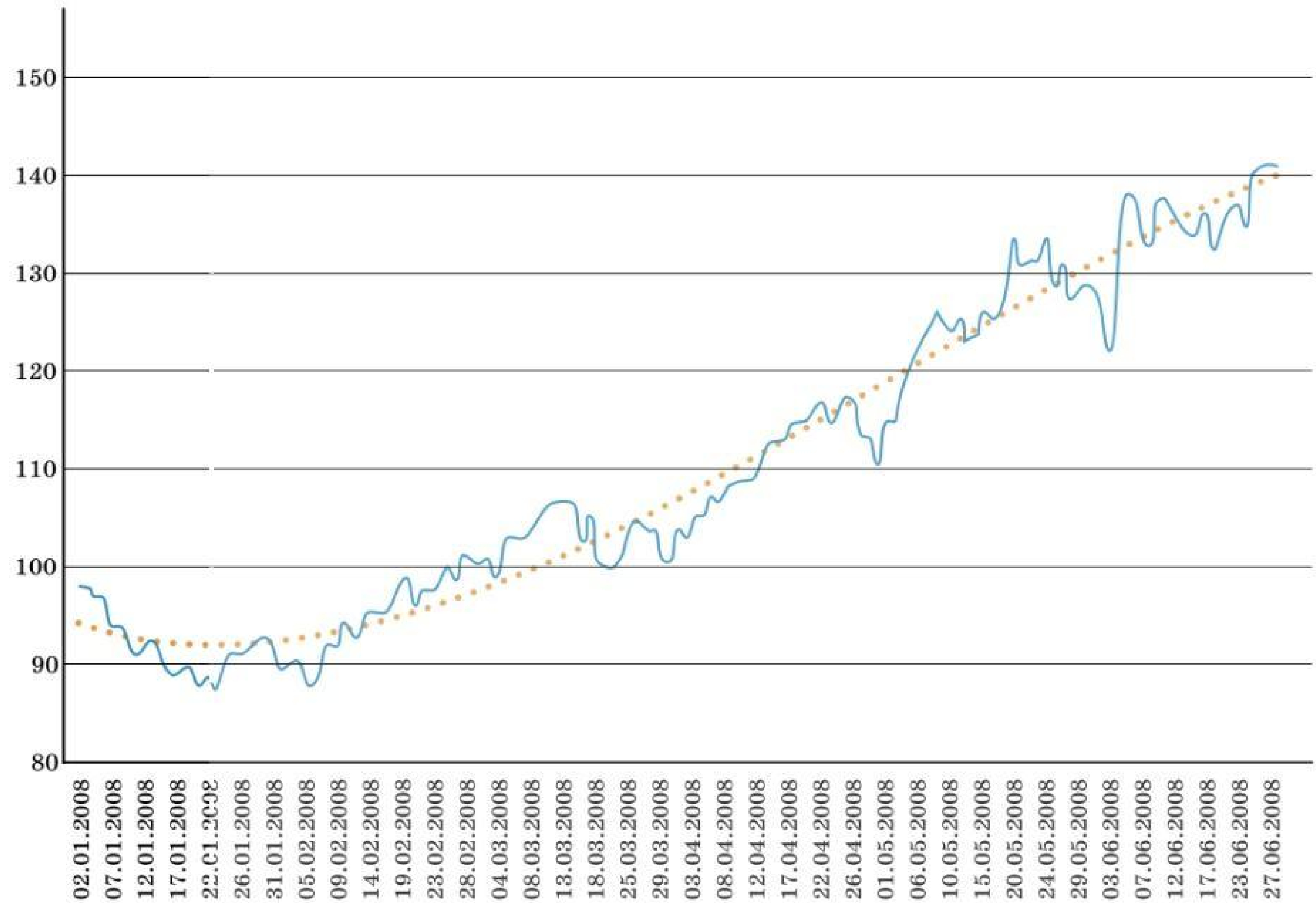


Среднюю массу ребёнка в каждом возрасте можно определить, взвешивая и измеряя тысячи мальчиков и девочек в школах, детских садах и поликлиниках. Поэтому общие тенденции в развитии мальчиков и девочек хорошо известны.

[1] ВОЗ — Всемирная организация здравоохранения.

Однако бывает так, что изменчивая величина не имеет аналогов ни в прошлом, ни в настоящем, а потому невозможно сказать, насколько она соответствует норме. Таких уникальных, изменчивых явлений много в экономике, где условия всё время меняются, и настоящее нельзя сравнивать с прошлым. Поэтому прогнозы в экономике делать намного труднее, чем предсказывать погоду.

Диаграмма 19. **Цена барреля нефти в первом полугодии 2008 г.**



ПРИМЕР 3. Цена нефти на мировых биржах традиционно измеряется в долларах США за баррель. Мы выбрали два периода — первое полугодие 2008 г., когда цены на нефть росли, и второе полугодие 2014 г., когда они снижались (диагр. 19 и 20).

Оранжевыми пунктирными линиями на обеих диаграммах показаны тенденции. На диаграмме 19 — по большей части **возрастающая** тенденция. На диаграмме 20 — **убывающая**. Но эти тенденции не были известны заранее, а были определены позже на основе уже сформировавшихся цен.

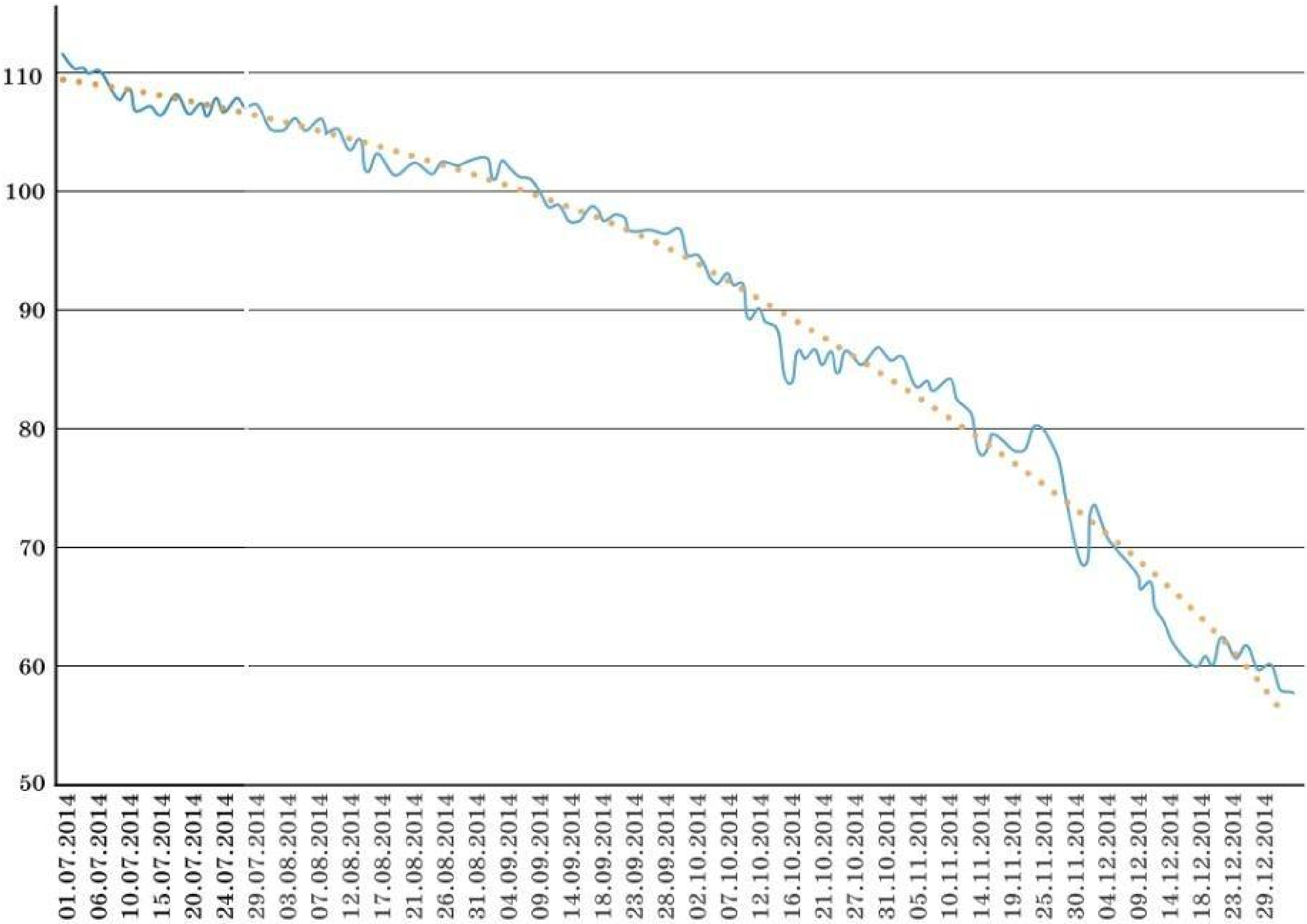
Мы видим, что в январе — июне 2008 г. цена на нефть в целом росла. Но были дни, когда случались падения: синяя линия, показывающая реальные цены, сильно колеблется, прыгает вверх и вниз.

Точно так же на диаграмме 20 при общем снижении цен часто наблюдаются незначительные, но резкие краткосрочные повышения.

Общее повышение не всегда означает постоянное повышение. Общее понижение не всегда означает постоянное понижение.

Какие факторы формируют тенденции в изменениях цены барреля нефти? В начале 2008 г. бурно развивалось строительство, крупные банки охотно давали кредиты, экономика быстро росла, и ей требовалось всё больше нефти. Это определило тенденцию: повышение спроса привело к постоянному росту цен. В 2014 г. сказался мировой кризис: экономическая ситуация в большинстве стран ухудшалась, спрос на нефть падал, поэтому она постепенно дешевела.

Диаграмма 20. Цена барреля нефти во втором полугодии 2014 г.



А какие факторы обусловливают кратковременные скачки цен? Внезапное решение какой-нибудь крупной компании о покупке нефти или отказ от ожидаемой покупки, задержка нефтеналивного танкера в океане, заявление влиятельного политика или экономиста, пожар на морской нефтедобывающей платформе, открытие нового месторождения и даже непроверенные слухи могут вызвать краткосрочное изменение цены в ту или иную сторону.

> Часто изменчивость в природных, экономических и социальных явлениях состоит из двух составляющих. Первая составляющая — тенденция, которая обусловлена серьёзными и долгосрочными факторами. Вторая составляющая — случайные отклонения, вызванные разнонаправленными краткосрочными действиями, которые зачастую невозможно предвидеть.

Одна из важных задач статистики — научиться выделять тенденции в изменчивых явлениях и отличать их от незначительных случайных колебаний.

Вопросы

1 Приведите свой пример величины, имеющей постоянное среднее значение, вокруг которого наблюдаются случайные колебания.

2 Что такое тенденция?

3 Приведите свой пример величины, имеющей возрастающую тенденцию.

4 Какие ещё факторы, помимо перечисленных в тексте, по вашему мнению, могут влиять на изменение массы растущего младенца?

14 Частоты значений в массивах данных

ПРИМЕР 1. Рассмотрим числовой набор 1, 3, 1, 2, 1, 5, 3, 2, 1, 1.

В этом наборе 10 чисел, но различных чисел только четыре: 1, 2, 3 и 5. Единица встречается 5 раз. Можно сказать, что **частота** числа 1 в этом наборе равна $\frac{5}{10}$, то есть 0,5. Аналогично частоты значений 2 и 3 равны 0,2, а частота значения 5 равна 0,1. Заметим, что сумма частот равна 1:

$$0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1.$$

Пусть в наборе всего N чисел, и значения, равные a, встречаются N_a раз. **Частотой** значения[1] a называется отношение $\frac{N_a}{N}$.

Чтобы в электронной таблице подсчитать, сколько раз в наборе встречается определённое значение, используйте функцию

СЧЁТЕСЛИ()

На рисунке подсчитано, что в данном наборе число 1 встречается 5 раз.

fx =СЧЁТЕСЛИ(B1:D5;1)

B	C	D	E
0	1	3	5
1	2	2	
1	2	1	
1	3	2	
2	4	4	

Частоты значений можно подсчитывать не только в числовых наборах, но и там, где значения не являются числами.

ПРИМЕР 2. Обратимся к таблице 8 (с. 12) с результатами подсчёта домашних животных у школьников одного класса. Различными значениями в нашем наборе являются виды животных, а также значение «Никого». Найдём их частоты. Для этого подсчитаем общее количество значений: 9 + 11 + 7 + 3 + 2 + 1 = 33.

Значение «Собака» встречается 9 раз. Поэтому частота этого значения равна $\frac{9}{33} \approx 0{,}273$. В статистике принято обыкновенные дроби превращать в десятичные с округлением при необходимости. Десятичные дроби удобнее писать в строку, с ними легче выполнять действия и их легче сравнивать, чем обыкновенные дроби.

[1] Частота бывает не только у значения в наборе. Позже мы познакомимся с частотой события.

Аналогично найдём частоты прочих значений и занесём их в таблицу 35.

Таблица 35. **Частоты значений**

Животное	Всего	Частота
Собака	9	0,273
Кошка	11	0,333
Никого	7	0,212
Рыбка	3	0,091
Птица	2	0,061
Черепаха	1	0,030
Сумма	33	1

Обратите внимание на последнюю строку. Сумма частот снова равна единице.

Свойство частот. В любом наборе сумма частот значений равна единице.

Докажем это свойство для набора, в котором четыре различных значения a, b, c и d, причём каждое может встречаться несколько раз. Предположим, значение a встречается N_a раз, а значения b, c и d встречаются N_b, N_c и N_d раз соответственно.

Тогда всего в наборе $N = N_a + N_b + N_c + N_d$ значений. Частота значения a равна $\frac{N_a}{N}$. Частота значения b равна $\frac{N_b}{N}$ и т. д. Найдём сумму частот:

$$\frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} + \frac{N_c}{N} + \frac{N_d}{N} = \frac{N_a + N_b + N_c + N_d}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Аналогично свойство доказывается для набора, в котором произвольное количество значений. Пользуясь тем, что сумма частот всегда равна единице, удобно делать промежуточную проверку в вычислениях.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим набор, в котором есть одинаковые значения. Например, оценки по математике, которые некоторый школьник получил в течение четверти:

$$3,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 3,\ 5,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4.$$

Всего 20 оценок. Чтобы вывести четвертную оценку, учитель находит среднее арифметическое: делит сумму всех чисел на 20. Можно поступить иначе. Запишем в таблицу 36 не все числа, а только различные значения и их частоты.

Таблица 36. **Частоты оценок**

Значение	2	3	4	5
Частота	0,1	0,3	0,45	0,15

Полезно проверить, равна ли сумма частот единице: $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}45 + 0{,}15 = 1$.

Теперь найдём среднее арифметическое: умножим значения на их частоты и сложим произведения:

$$2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}45 + 5 \cdot 0{,}15 = 0{,}2 + 0{,}9 + 1{,}8 + 0{,}75 = 3{,}65.$$

Убедитесь в том, что обычный способ даст то же самое среднее.

Связь между частотами значений и средним арифметическим*

ТЕОРЕМА. Пусть в наборе N чисел, но среди них только k различных значений $x_1, x_2, \dots, x_k$. Пусть значение x_1 встречается N_1 раз, значение x_2 встречается N_2 раз, и т. д.: значение x_k встречается ровно N_k раз. Тогда среднее арифметическое набора равно

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{N_1}{N} + x_2 \cdot \frac{N_2}{N} + \dots + x_k \cdot \frac{N_k}{N}.$$

Теорема утверждает, что среднее арифметическое числового массива равно сумме произведений значений и их частот. Для доказательства составим сумму из произведений различных чисел и их частот:

$$x_1 \cdot \frac{N_1}{N} + x_2 \cdot \frac{N_2}{N} + \dots + x_k \cdot \frac{N_k}{N} = \frac{x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + x_3 \cdot N_3 + \dots + x_k \cdot N_k}{N} = \bar{x}.$$

Получилось среднее арифметическое. Теорема доказана.

Вопросы

1 Чему равны частоты значений в наборе, где 10 различных значений, но каждое встречается ровно один раз?

2 Сформулируйте определение частоты значения.

3 Сформулируйте свойство частот.

4 Как найти среднее значение числового набора, зная различные значения и их частоты?

В редакторах электронных таблиц можно быстро вычислить сумму произведений значений и их частот. Для этого есть функция

СУММПРОИЗВ()

На рисунке показано решение задачи из примера 3.

f_x =СУММПРОИЗВ(D2:G2;D3:G3)

C	D	E	F	G
Значение	2	3	4	5
Частота	0,1	0,3	0,45	0,15
			Среднее	3,65

Задачи

96 Дан числовой набор 5, 4, 8, 1, 1, 3, 4, 5, 8, 1. Найдите частоту:

а) значения 1; б) значения 4.

97 Дана последовательность букв: ФАВЫДОВЛЫДЯЮФЛЧЛИОЫДСОЫЖФ.

Найдите в этой последовательности частоту:

а) буквы Д; в) буквы Ы;

б) буквы Ф; г) буквы С.

98 В числовом наборе 5 значений. Частоты четырёх значений известны: 0,35, 0,2, 0,1 и 0,05. Найдите частоту пятого значения.

99 В таблице 14 (с. 16) даны четвертные оценки учащихся класса.

а) Найдите частоты различных четвертных оценок по математике. Составьте таблицу значений и частот.

б) Вычислите среднюю оценку по математике за четверть.

100 В числовом наборе встречаются только значения 2, 3, 4 и 5, а частоты их неизвестны (табл. 37). Найдите среднее значение этого числового набора.

Таблица 37

Значение	2	3	4	5
Частота	x	y	y	x

101 Пусть число m является медианой числового набора. Покажите, что сумма частот всех чисел набора, которые не больше m, не меньше чем 0,5.

102 Частоту букв в русском языке можно приблизительно оценить с помощью художественных текстов. Прочитайте три отрывка из произведений А. С. Пушкина.

Первый отрывок («*Дубровский*»)

По этим приметам немудрено будет вам отыскать Дубровского. Да кто же не среднего роста, у кого не русые волосы, не прямой нос, да не карие глаза! Бьюсь об заклад, три часа будешь говорить с самим Дубровским, а не догадаешься, с кем Бог тебя свёл. Нечего сказать, умные головушки приказные!

Второй отрывок («*Выстрел*»)

Рассеянные жители столицы не имеют понятия о многих впечатлениях, столь известных жителям деревень или городков, например об ожидании почтового дня: во вторник и пятницу полковая наша канцелярия бывала полна офицерами: кто ждал денег, кто письма, кто газет.

Третий отрывок («*Капитанская дочка*»)

Вскоре все заговорили о Пугачёве. Толки были различны. Комендант послал урядника с поручением разведать хорошенько обо всём по соседним селениям и крепостям. Урядник возвратился через два дня и объявил, что в степи вёрст за шестьдесят от крепости видел он множество огней и слышал от башкирцев, что идёт неведомая сила.

а) Посчитайте буквы «а», «о» и «и» в трёх этих отрывках и заполните таблицу 38.

Таблица 38

Номер отрывка	Буква «а»	Буква «о»	Буква «и»
1			
2			
3			

б) Посчитайте буквы «н» и «т» и заполните таблицу 39. Можно ли по полученным данным судить, какая из букв: «н» или «т» — используется в русском языке чаще?

Таблица 39

Номер отрывка	Буква «н»	Буква «т»
1		
2		
3		

Историческая справка. На протяжении нескольких веков для печати книг, журналов и газет использовались литеры — буквы, отлитые из специального сплава на основе свинца. Наборщик на специальной доске набирал текст каждой страницы. Затем набор покрывали типографской краской и делали необходимое количество оттисков. Поскольку одни буквы встречаются чаще, а другие реже, было важно знать, с какой частотой в текстах встречаются разные буквы (табл. 40).

Таблица 40. **Частоты букв русского языка**

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А	0,075	Л	0,042	Ц	0,005
Б	0,017	М	0,031	Ч	0,015
В	0,046	Н	0,065	Ш	0,007
Г	0,016	О	0,110	Щ	0,004
Д	0,030	П	0,028	Ъ	0,001
Е и Ё	0,087	Р	0,048	Ы	0,019
Ж	0,009	С	0,055	Ь	0,016
З	0,018	Т	0,065	Э	0,003
И	0,075	У	0,025	Ю	0,007
Й	0,012	Ф	0,002	Я	0,022
К	0,034	Х	0,011		

Не менее важна информация о частотах букв для лингвистов и криптографов[1]. Частоты символов лежат в основе некоторых методов расшифровки текстов на неизвестных языках. Частоты букв, знаков препинания и другие статистические характеристики текста используют для выяснения авторства, когда точно неизвестно, кто написал произведение.

15 Группировка данных и гистограммы

Как правило, в обширных массивах статистических данных совпадающие значения встречаются редко. Чаще встречаются близкие значения, которые разумно не различать. Чтобы понять, насколько плотно распределены значения на каждом участке числовой прямой, применяют **группировку данных.**

Чтобы сгруппировать данные, нужно разбить числовую прямую на одинаковые промежутки — **интервалы группировки.** Длина интервала называется **шагом группировки.** Затем нужно подсчитать долю значений в каждом интервале. Получаются **частоты значений в интервалах.** Осталось построить диаграмму по полученным данным.

ПРИМЕР 1. В таблице 41 приведены результаты ежедневных измерений атмосферного давления в Москве летом 2019 г.

[1] Криптограф — специалист по шифрованию, расшифровке и защите информации.

Таблица 41. **Атмосферное давление летом 2019 г. в Москве**

749,4	753,0	746,1	756,8	740,2	738,2	740,3	746,0	740,3	750,3	751,6	756,7
747,3	752,8	745,8	751,7	743,3	742,4	744,6	741,2	736,5	745,8	754,5	754,8
750,8	752,3	748,7	739,3	740,8	743,5	749,1	742,2	740,1	746,5	754,3	752,2
755,2	751,2	749,6	730,5	735,4	745,6	748,3	739,7	744,2	746,2	758,1	752,1
753,7	755,9	749,2	736,8	738,1	745,3	744,7	736,9	742,3	747,1	753,0	
754,1	749,4	749,1	741,3	738,4	743,9	745,1	742,9	735,4	746,8	757,0	
754,3	747,5	752,4	738,9	735,7	742,6	748,3	741,0	741,8	743,4	755,8	
753,8	748,4	753,7	739,8	735,4	740,1	748,9	738,9	746,6	750,1	751,9	

Всего значений 92, повторяющихся среди них мало. Наименьшее значение 730,5, наибольшее — 758,1 мм рт. ст. Шаг группировки выберем 4 мм рт. ст., а первый интервал возьмём 726—730 мм рт. ст. В него не попадает ни одно значение. Последний интервал тоже сделаем пустым.

Если значение попадает на границу двух интервалов, можно отнести его к любому из них — это вопрос договорённости. Мы относим граничное значение к левому интервалу. Например, значение 742,0 мы включили в интервал 738—742. Результаты соберём в таблицу 42.

Получилось 10 интервалов. Самые «населённые» — интервалы от четвёртого до седьмого.

Частоты находятся в правом столбце таблицы. Их выражают в долях единицы. Для частот попадания в интервал верно то же свойство, которое мы формулировали и доказывали для отдельных значений: сумма частот равна единице.

Чтобы с помощью электронной таблицы узнать, сколько всего значений в массиве данных, используйте функцию

СЧЁТ()

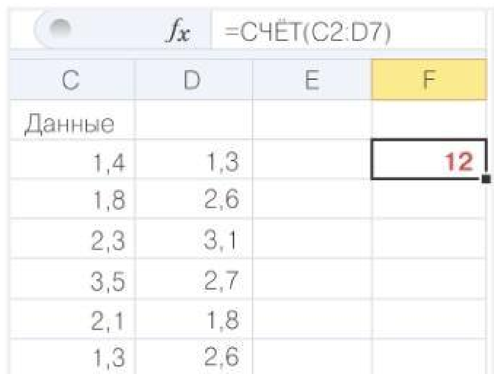


Таблица 42. **Группированные данные, шаг 4 мм рт. ст.**

№ п/п	Интервал, мм рт. ст.	Количество попаданий в интервал	Частота значения в интервале
1	726—730	0	0
2	730—734	1	0,011
3	734—738	7	0,076
4	738—742	18	0,196
5	742—746	18	0,196
6	746—750	19	0,207
7	750—754	17	0,185
8	754—758	11	0,120
9	758—762	1	0,011
10	762—766	0	0
	Всего	92	1,002

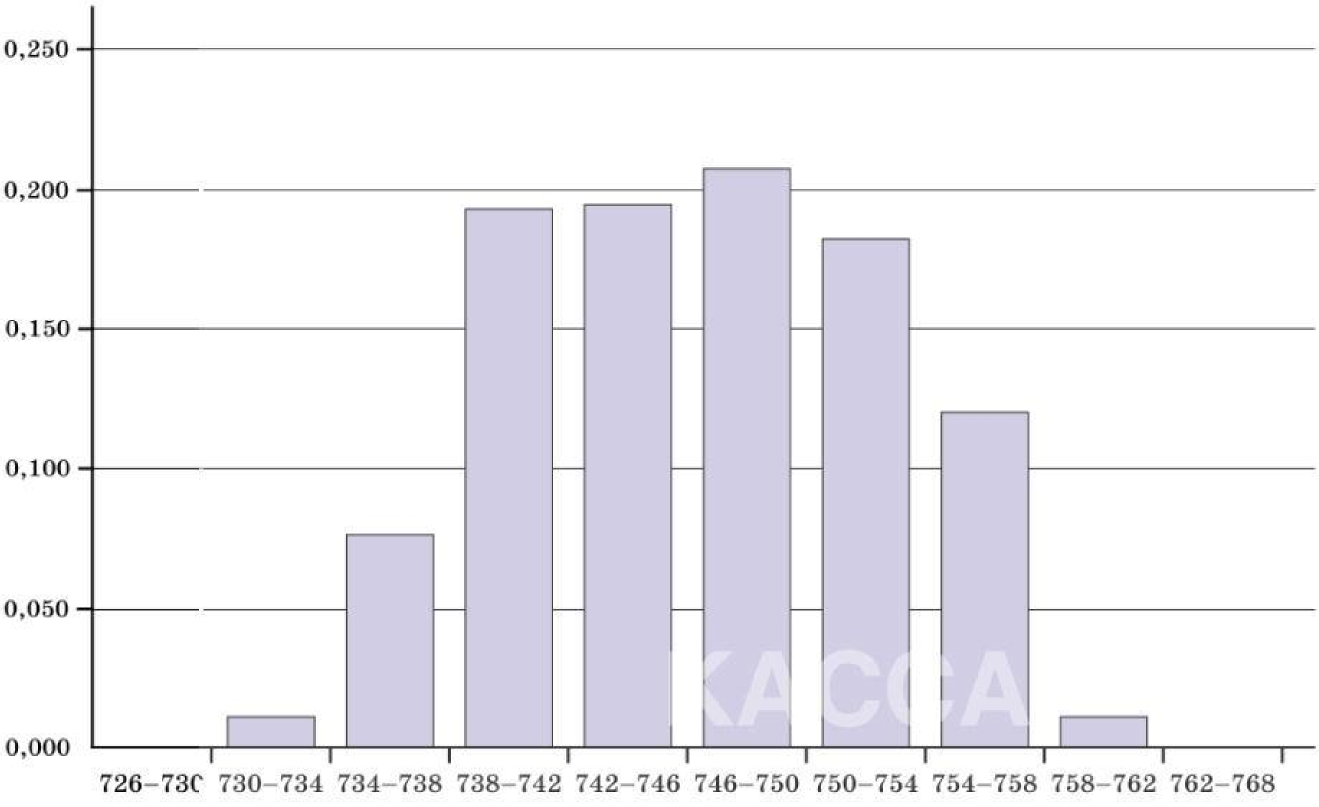
Сумма всех частот равна единице.

Чтобы отобразить полученную информацию наглядно, построим **гистограмму**, то есть диаграмму частот (диагр. 21).

Гистограммой называется диаграмма частот. Гистограмма позволяет наглядно представить характер изменчивости данных.

Часто по внешнему виду гистограммы можно визуально оценить среднее значение, медиану и выделить область концентрации значений. На гистограмме (диагр. 21) видно, что больше всего было дней, когда давление оказывалось в пределах от 738 до 754 мм рт. ст. Дней, когда давление было ниже 738 мм рт. ст. или выше 754 мм рт. ст., было мало — сумма частот в соответствующих интервалах невелика. Среднее и медиана расположены где-то в центре гистограммы, то есть вблизи значения 746 мм рт. ст.

Диаграмма 21. **Давление в Москве летом 2019 г. (гистограмма)**

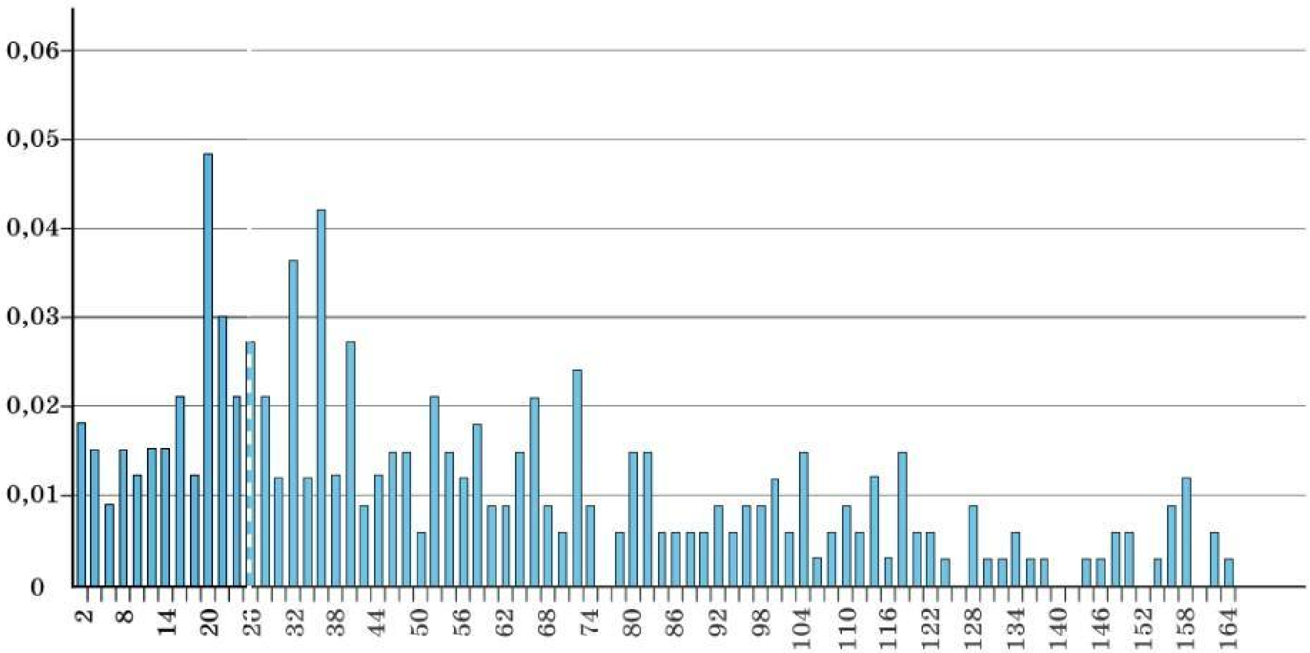


Данных у нас немного, но видна закономерность: далёкие от центра (очень малые и очень большие) значения редки, в основном значения концентрируются около среднего. От этого гистограмма напоминает горку с двумя склонами.

ПРИМЕР 2. Мы собрали данные о длительности всех разговоров одного абонента в течение месяца. Всего разговоров за месяц было 387. Самый короткий разговор длился всего секунду. Самый длинный — более 15 мин (924 с).

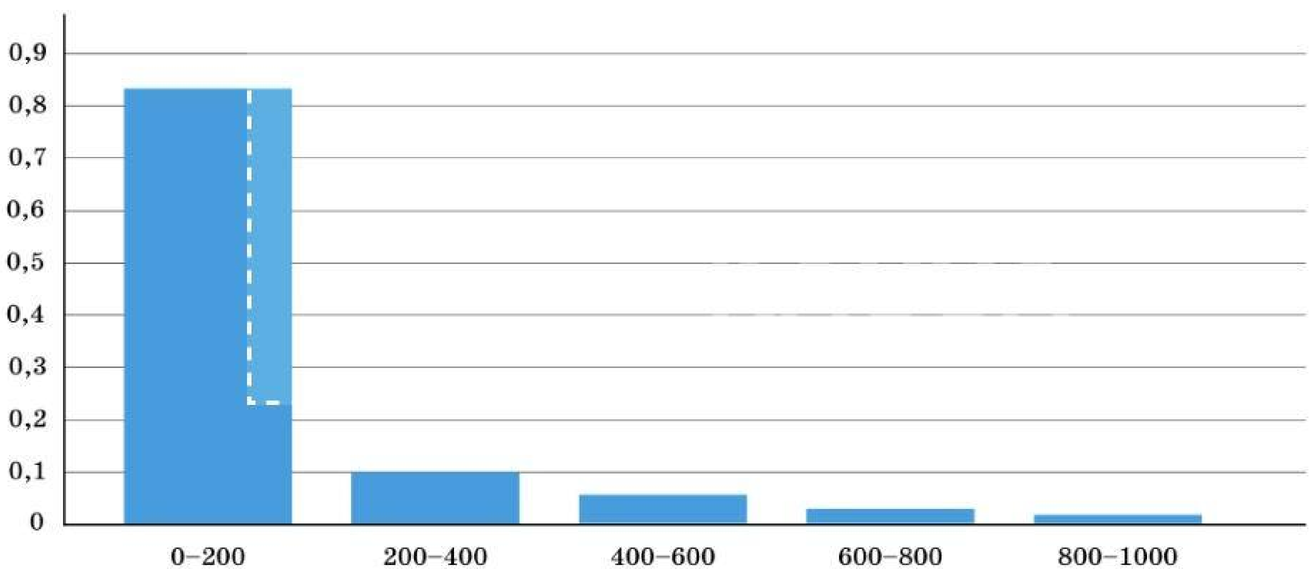
Интересно посмотреть на частоты разговоров разной длительности. Построим гистограмму по имеющимся данным. Нужно выбрать подходящую группировку. Если шаг слишком мал, то интервалов очень много и характер изменчивости плохо виден из-за «прыгающих» столбиков (диагр. 22). Информации много, но общую картину не видно. Мы даже не стали изображать всю получившуюся гистограмму — она слишком длинная. Группировка неудачная, потому что слишком мал шаг.

Диаграмма 22. Длительность телефонных разговоров. Шаг 2 с



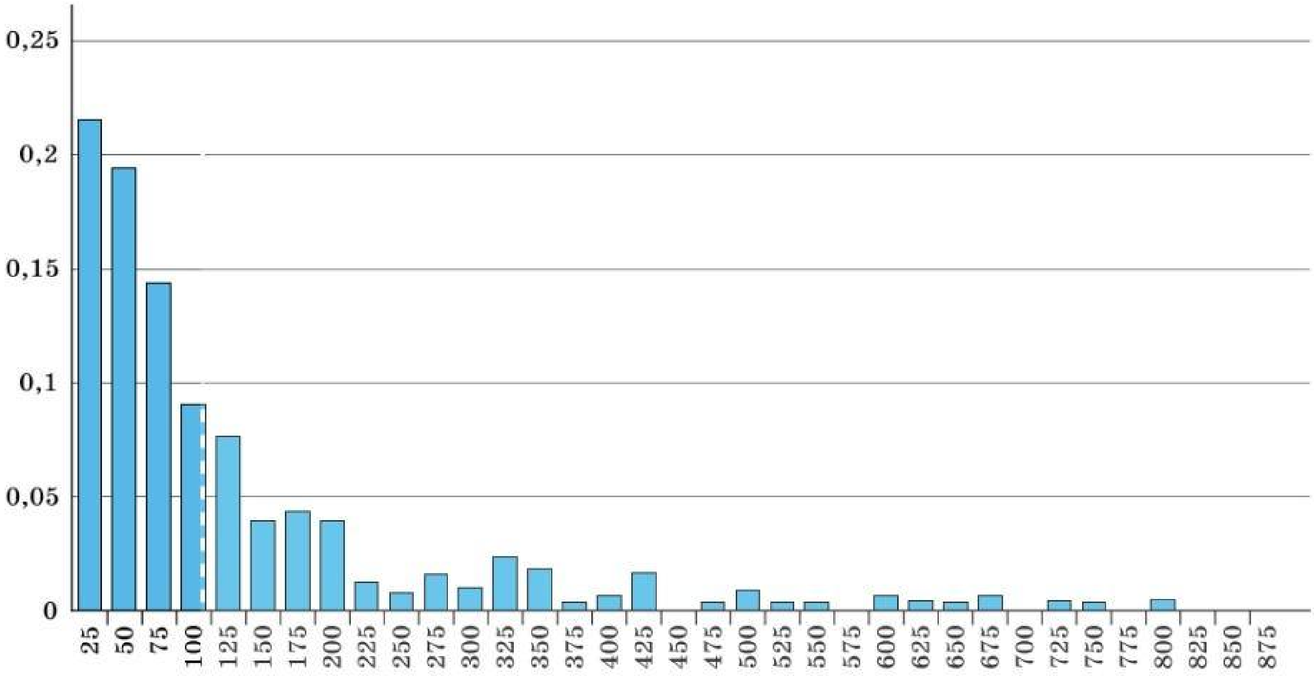
Если шаг слишком большой, то интервалов мало, и картинка получается очень грубая — много полезной информации теряется. Диаграмма 23 малоинформативна из-за слишком большого шага.

Диаграмма 23. Длительность телефонных разговоров. Шаг 200 с



При шаге 25 с (для удобства на оси абсцисс отмечены только правые концы интервалов) гистограмма (диагр. 24) достаточно подробная, и хорошо видна убывающая тенденция — в целом, чем длительнее разговоры, тем таких разговоров меньше.

Диаграмма 24. **Длительность телефонных разговоров. Шаг 25 с**



Эта гистограмма существенно отличается по форме от гистограммы частот атмосферного давления. Это значит, что и характер изменчивости здесь совсем другой.

Шаг группировки нужно выбирать так, чтобы, с одной стороны, диаграмма была достаточно подробной, а с другой — отражала общую тенденцию и хорошо показывала характер случайной изменчивости данных.

Вопросы

1 В чём заключается группировка данных?

2 Что такое шаг группировки?

3 Как выбрать подходящий шаг группировки?

4 Что такое частота попадания в интервал группировки? Чему равна сумма всех частот?

5 Что такое гистограмма?

Искать количество значений, попавших в каждый интервал группировки, легко, если научиться пользоваться функцией

ЧАСТОТА()

На рисунке показан пример: сколько значений меньше 0, сколько от 0 до 1, от 1 до 2 и т. д.

Внимание! Функция ЧАСТОТА находит не частоту, а количество значений в интервалах.

fx =ЧАСТОТА(C2:D7;E2:E7)

C	D	E	F
Данные		Инт-лы	Количество
1,4	1,3	0	0
1,8	2,6	1	0
2,3	3,1	2	5
3,5	2,7	3	5
2,1	1,8	4	2
1,3	2,6	5	0

Задачи

103 В таблице 43 приведены данные о населении всех городов Московской области (данные на 2019 г.). Рассмотрите таблицу.

Таблица 43. **Население городов Московской области**

№ п/п	Город	Население, тыс. чел.	№ п/п	Город	Население, тыс. чел.
1	Апрелевка	29,1	31	Краснознаменск	42,5
2	Балашиха	490,0	32	Кубинка	20,1
3	Бронницы	22,6	33	Куровское	20,6
4	Верея	5,0	34	Ликино-Дулёво	29,0
5	Видное	71,4	35	Лобня	89,3
6	Волоколамск	19,2	36	Лосино-Петровский	25,3
7	Воскресенск	93,2	37	Луховицы	30,3
8	Высоковск	10,4	38	Лыткарино	58,6
9	Голицыно	17,4	39	Люберцы	207,3
10	Дедовск	30,1	40	Можайск	30,0
11	Дзержинский	56,3	41	Мытищи	222,7
12	Дмитров	68,7	42	Наро-Фоминск	63,0
13	Долгопрудный	112,0	43	Ногинск	102,3
14	Домодедово	133,5	44	Одинцово	137,5
15	Дрезна	11,3	45	Озёры	25,0
16	Дубна	75,0	46	Орехово-Зуево	118,0
17	Егорьевск	72,1	47	Павловский Посад	63,9
18	Жуковский	107,9	48	Пересвет	13,6
19	Зарайск	22,9	49	Подольск	304,2
20	Звенигород	21,9	50	Протвино	35,8
21	Ивантеевка	79,3	51	Пушкино	106,8
22	Истра	33,5	52	Пущино	20,8
23	Кашира	48,0	53	Раменское	119,9
24	Клин	79,4	54	Реутов	107,0
25	Коломна	141,1	55	Рошаль	20,2
26	Королёв	224,5	56	Руза	13,0
27	Котельники	46,8	57	Сергиев Посад	102,0
28	Красноармейск	26,5	58	Серпухов	124,9
29	Красногорск	171,8	59	Солнечногорск	51,6
30	Краснозаводск	12,9	60	Старая Купавна	22,5

Окончание

№ п/п	Город	Население, тыс. чел.	№ п/п	Город	Население, тыс. чел.
61	Ступино	56,0	**68**	Шатура	32,4
62	Талдом	12,7	**69**	Щёлково	124,8
63	Фрязино	60,0	**70**	Электрогорск	22,8
64	Химки	254,7	**71**	Электросталь	157,4
65	Хотьково	21,2	**72**	Электроугли	20,7
66	Черноголовка	21,1	**73**	Яхрома	14,3
67	Чехов	71,9			

а) Укажите в таблице три подмосковных города, где численность населения, по вашему мнению, значительно отличается от численности населения большинства городов (значительно больше или значительно меньше).

б) Удалите из таблицы три найденных в пункте а) города. Найдите наименьшее и наибольшее значения после удаления этих трёх городов.

104 После удаления из таблицы 43 городов Балашихи, Подольска и Вереи нужно сгруппировать оставшиеся данные.

а) Сколько интервалов группировки получится, если сделать начальное значение 10 тыс. чел. при шаге группировки 10 тыс. чел.?

б) Сколько интервалов группировки получится, если сделать начальное значение 0 тыс. чел., а шаг группировки 25 тыс. чел.?

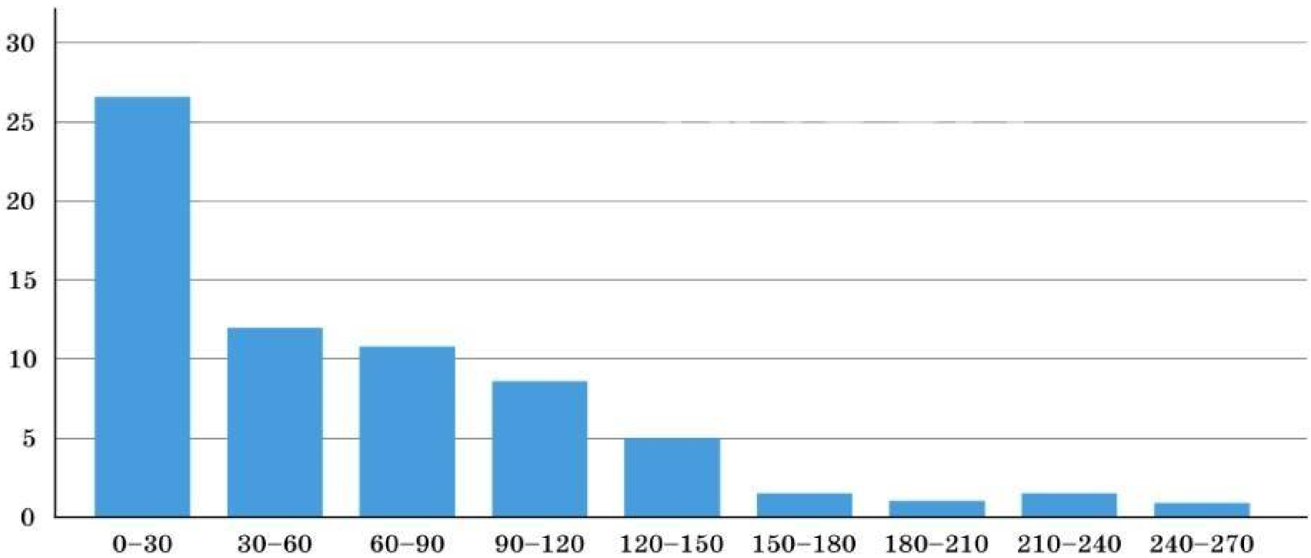
в) Какой из этих двух способов группировки вы бы предпочли?

г) Сколько городов из таблицы 43 попадает в интервал 90—120 тыс. чел.?

д) Какова частота попадания в интервал 90—120 тыс. чел.?

105 На диаграмме 25 изображена гистограмма «Распределение населения городов Московской области», построенная по данным таблицы 43 после удаления трёх городов (Подольск, Балашиха и Верея). Начальное значение 0 тыс. чел., шаг группировки 30 тыс. чел. Рассмотрите гистограмму, ответьте на вопросы.

Диаграмма 25. **Распределение населения городов Московской области**



а) Как бы вы описали характер изменчивости величины «Население подмосковного города»?

б) Города с каким населением вы бы назвали крупными?

в) Городов с каким населением больше всего?

16 Выборка

Обратите внимание: в примерах с населением городов Московской области и с атмосферным давлением мы брали *все* данные: все города, все дни лета 2019 г. в Москве. В примерах с напряжением в электросети и с массой шоколадных батончиков мы не могли взять все значения — их очень много или даже бесконечно много. Мы случайно выбирали некоторые значения из всей совокупности. Получалась выборка.

Набор значений некоторой величины, которые выбраны для изучения всей совокупности, называется **выборкой**. Часто выборку формируют случайным образом и говорят о **случайной выборке**.

Рост человека

Невозможно заранее предсказать рост незнакомого человека. Для исследователя эта величина случайная. Но если измерить рост многих случайно выбранных людей, то всё же проявится некоторая закономерность. Чтобы в этом убедиться, мы обсудим данные о росте человека с помощью трёх выборок — малой, средней и большой.

Таблица 44 содержит данные о росте двадцати случайно выбранных девушек в возрасте 20—21 года.

Таблица 44. **Рост 20 случайно выбранных девушек, см**

Данные										Среднее	Медиана	Размах
164	170	160	163	170	171	166	169	166	165	165,35	165,5	13
167	164	168	164	167	165	164	158	159	167			

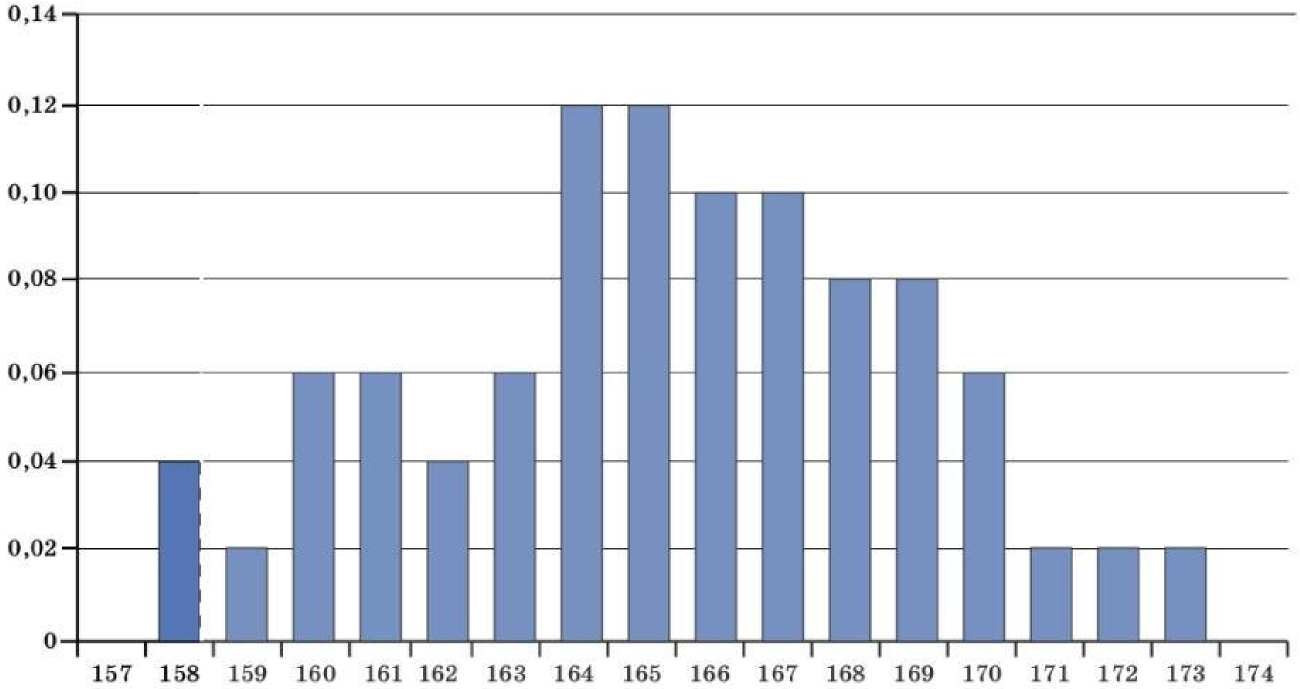
Отдельные значения заметно различаются: размах равен 13 см.

Пополним выборку. Добавим ещё тридцать наблюдений и занесём все пятьдесят в общую таблицу 45.

Таблица 45. **Рост 50 случайно выбранных девушек, см**

Данные										Среднее	Медиана	Размах
164	170	160	163	170	171	166	169	166	165	165,28	165,0	15
167	164	168	164	167	165	164	158	159	167			
161	169	162	170	168	165	165	166	164	173			
158	166	168	167	161	167	165	168	165	164			
163	169	161	162	163	160	166	169	172	160			

Диаграмма 26. **Распределение роста девушек (объём выборки — 50 наблюдений)**

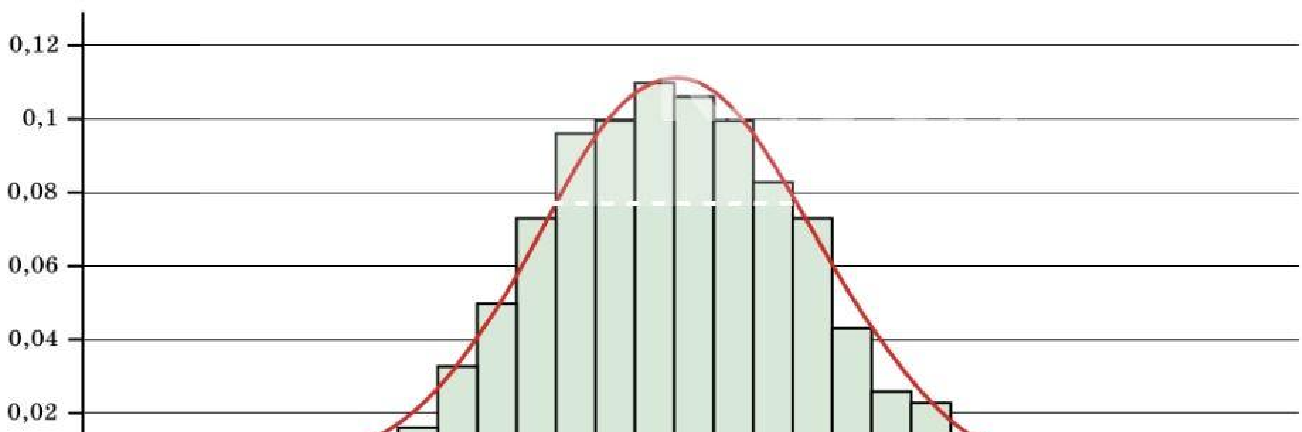


Размах данных вырос. Это естественно: чем больше выборка, тем выше шансы, что в неё попадут очень рослые девушки и девушки малого роста. А среднее и медиана практически не изменились.

Построим гистограмму с шагом группировки 1 см (у нас данные с точностью до сантиметра). Гистограмма (диагр. 26) напоминает двускатную горку: большинство значений сконцентрировано вблизи среднего значения, а чем дальше от центра, тем частоты значений меньше. Правда, горка получилась с ямами и обрывами.

Добавим ещё 250 наблюдений. Теперь в выборке данные о росте 300 случайно выбранных девушек. Построим новую гистограмму (диагр. 27). Наименьший рост 151 см, наибольший — 180 см. Размах вырос до 28 см, а среднее значение изменилось мало: оно по-прежнему около 165 см.

Диаграмма 27. **Распределение роста девушек (объём выборки — 300 наблюдений)**



Внешнее сходство полученной фигуры с двускатной горой усилилось, а ямы сгладились. На диаграмме 27 показана колоколообразная линия, к которой приближается контур гистограммы с ростом числа наблюдений.

Зная форму этой линии[1], можно примерно указать долю девушек, рост которых находится в заданных пределах. Например, можно утверждать, что девушек с ростом от 162 до 170 см примерно 70%, а тех, чей рост превышает 170 см, — около 15%.

Объяснить, почему получается именно такая форма, можно с помощью мысленного эксперимента. Представим себе, что каждая девушка заняла «своё место» на числовой прямой (рис. 7).

Девушек маленького роста (например, ниже 155 см) совсем мало. Точно так же мало очень высоких девушек (скажем, с ростом более 180 см). Поэтому края получившейся гистограммы низкие. Большинство девушек среднего роста или около среднего роста, поэтому центральная часть гистограммы высокая.

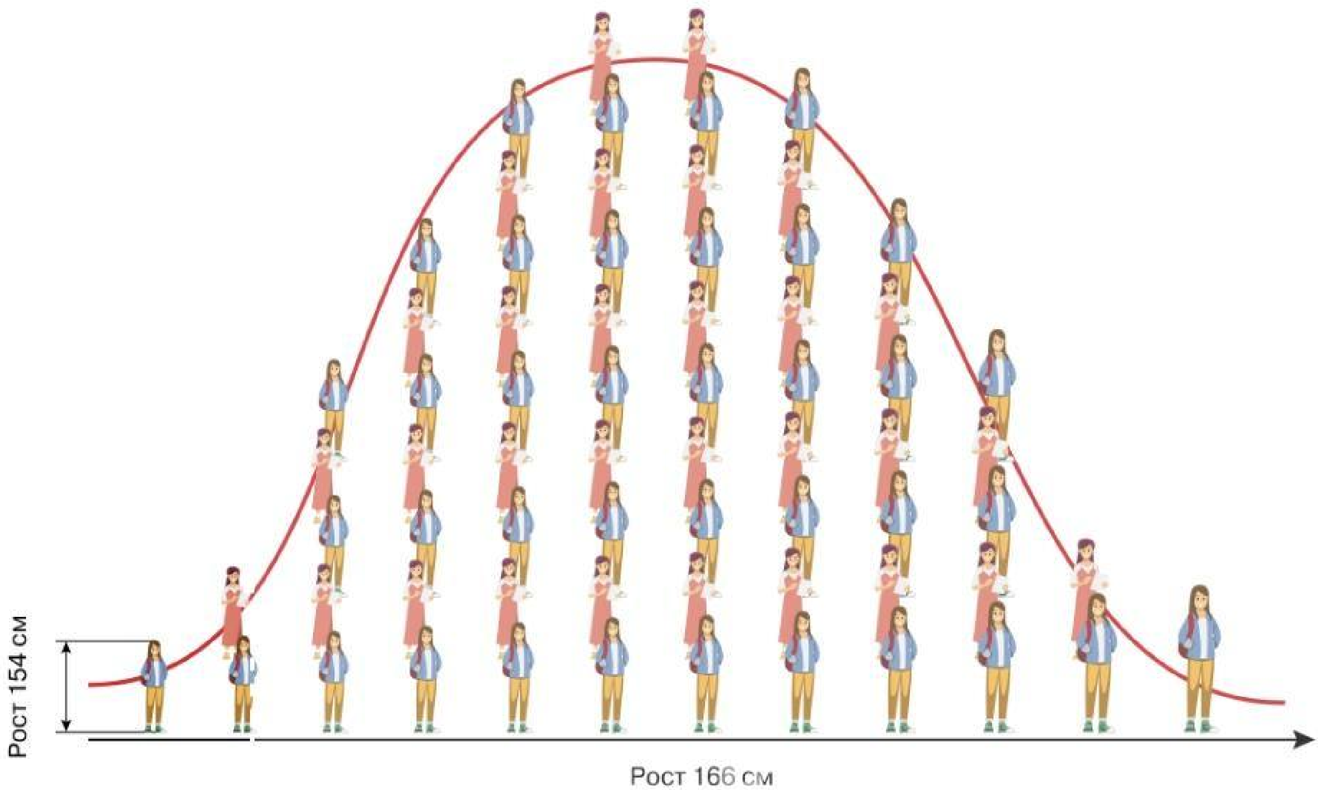


Рисунок 7. **Каждая девушка «встала» на отметку своего роста**

Опыт показывает, что не только рост людей подчиняется такой закономерности. Похожий характер имеет изменчивость атмосферного давления (см. диагр. 21), размера листьев на деревьях, массы шоколадных батончиков и других товаров и многих других величин. Но не следует думать, что все случайные величины в природе подчиняются такому или похожему закону. В примере с длительностью телефонных разговоров мы видели гистограмму другой формы, а значит, другой вид случайной изменчивости.

---

[1] Эту кривую называют кривой нормального распределения или кривой Гаусса, хотя впервые она была описана не Карлом Гауссом, а Абрахамом Муавром в 1738 г. Известно уравнение этой кривой. Более подробно с этой линией вы познакомитесь в старших классах.

Поведение многих изменчивых величин подчиняется закономерностям, которые проявляются при изучении больших наборов наблюдений. Разным видам изменчивости соответствуют гистограммы разной формы.
Изучение закономерностей распределения разных случайных величин — одна из задач математической науки **теории вероятностей**.

Мы провели небольшое выборочное исследование роста девушек. Ценность выборочных исследований в том, что даже не очень большие случайные выборки хорошо отражают свойства всей изучаемой совокупности данных. Подробнее об этом в следующем параграфе.

Вопросы

1 Что такое выборка?

2 Как вы думаете, какие факторы влияют на рост человека?

3 Какие факторы могут влиять на длину берёзового листа; на вес домашней кошки; на размер грецкого ореха; на температуру тела человека; на время, которое находится в пути рейсовый самолёт; на результат измерения высоты потолка в квартире?

17* Статистическая устойчивость и оценки с помощью выборки

В предыдущем параграфе мы обсуждали случайную выборку измерений роста. Выбирая 20 шоколадных батончиков (см. с. 49), мы также сделали выборку — ведь мы не могли взвесить все выпущенные батончики. Данные об атмосферном давлении в Москве (см. с. 64) также выборочные.

Чаще всего невозможно изучить всю совокупность данных: они не все доступны, и даже их число может быть неизвестно. Для изучения таких данных обычно составляют случайную выборку.

Имея выборку из нескольких сотен или тысяч наблюдений, можно с разумной точностью оценить неизвестное среднее значение, указать, какая доля значений больше среднего, или найти частоту значений, попадающих в определённый интервал.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уже знакомую нам выборку измерений напряжения в бытовой сети (табл. 46).

Таблица 46. **Выборка значений напряжения в бытовой сети, В**

225	225	227	225	228
228	218	217	218	223
225	216	222	220	218
221	220	214	219	231
228	227	220	224	216

Построим таблицу частот, выбрав шаг группировки 3 В (табл. 47).

Таблица 47. **Частоты**

Напряжение, В	**Частота**
209—211	0
212–214	0,04
215–217	0,12
218–220	0,28
221–223	0,12
224–226	0,20
227–229	0,20
230–232	0,04
233–235	0

Найдём с помощью таблицы частот, например, как часто напряжение заключено между 215 и 226 В. То есть найдём суммарную частоту значений в интервалах от 215 до 226 В (строки в табл. 47 выделены)

$$0{,}12 + 0{,}28 + 0{,}12 + 0{,}20 = 0{,}72.$$

Среднее выборочное значение удобнее найти, пользуясь таблицей 47. Оно равно 222,2 В.

Такие расчёты были бы бесполезны, если бы не **статистическая устойчивость.**

Частоты, средние значения и другие характеристики многих изменчивых величин мало отличаются от таких же характеристик в другой случайной выборке или во всей совокупности данных. Это свойство изменчивых величин называют **статистической устойчивостью**.

Чтобы статистическая устойчивость проявила себя в двух выборках, нужно чтобы эти выборки были сделаны в одинаковых условиях. Если в одной и той же квартире измерять напряжение электрической сети первый раз днём, второй раз вечером, когда почти у всех соседей горит свет, а третий раз ночью, то, скорее всего, все три выборки будут значительно отличаться друг от друга.

Чтобы выборка хорошо отражала свойства всей совокупности данных (их может быть бесконечно много), лучше всего, чтобы эта выборка была сделана случайным образом. Например, измерения напряжения нужно проводить на протяжении длительного времени в случайные моменты. Чем больше объём выборки (количество значений), тем лучше, как правило, проявляет себя статистическая устойчивость.

Статистическая устойчивость даёт возможность **оценивать** (приближённо находить) частоты и средние значения в бесконечных или плохо доступных массивах данных. При этом нужно помнить, что в силу случайной изменчивости оценки, сделанные с помощью выборки, приблизительные[1].

[1] Изучением выборочных оценок занимается теория вероятностей. Она часто позволяет дать ответ на вопрос, как сильно могут отличаться истинные частоты и средние от тех частот и средних, которые мы можем найти по сделанной выборке.

ПРИМЕР 2. Оценим по выборке, сколько времени на протяжении суток напряжение в сети превышает 220 В.

Нужно подсчитать долю значений, которые больше, чем 220 В. Снова воспользуемся таблицей 47: сложим частоты в пяти последних строках (все интервалы, начиная с интервала 221—223 В):

$$0,12 + 0,20 + 0,20 + 0,04 + 0 = 0,56.$$

В сутках 24 часа. Общая продолжительность периода, когда напряжение превышает 220 В, приближённо равна $24 \cdot 0,56 = 13,44$ часа, то есть примерно 13 ч 26 минут.

Ещё раз подчеркнём, что полученная оценка лишь приблизительно равна истинному значению. Да и что такое истинное значение в данном примере?

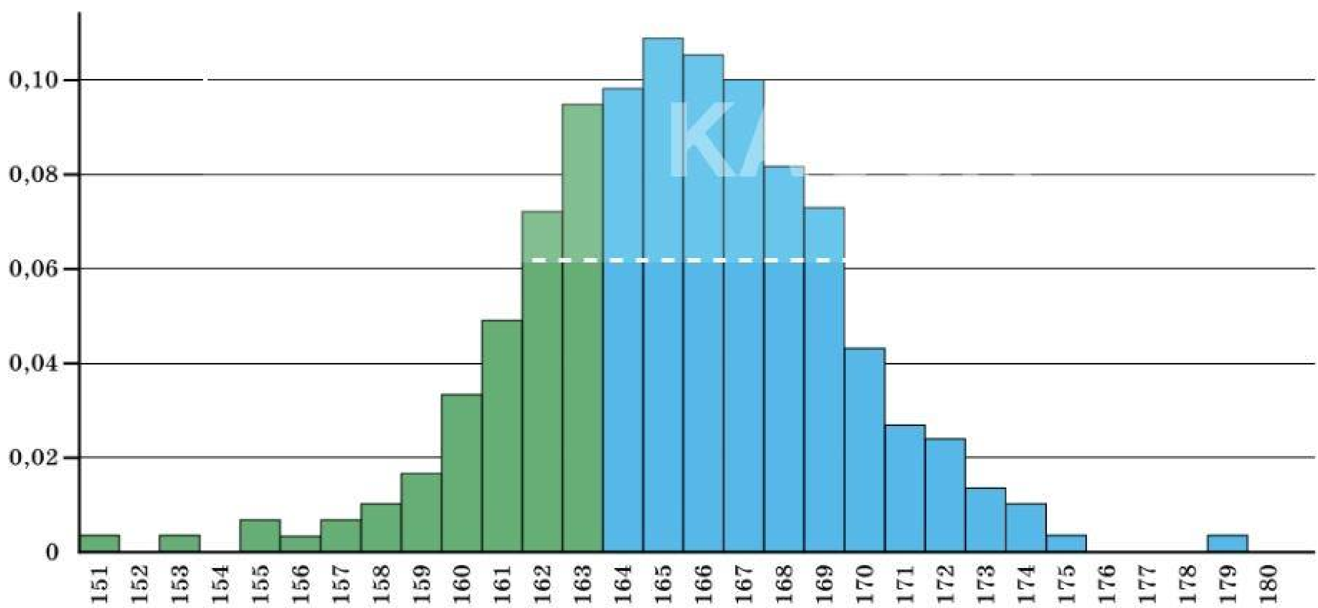
ПРИМЕР 3. В таблице 32 даны массы 20 купленных шоколадных батончиков. Рассмотрим теперь вообще все такие батончики. Сколько процентов из них имеют массу менее 49 г?

Сотни тысяч этих батончиков сейчас лежат в магазинах, кафе в самых разных городах и сёлах. Миллионы таких батончиков давно уже съедены. А ещё миллионы даже не выпущены на фабрике. Поэтому взвесить все батончики мы не можем. Но можем воспользоваться имеющейся выборкой. В этой выборке 3 батончика из 20 легче 49 г. Следовательно, в силу статистической устойчивости можно предположить, что доля таких «лёгких» батончиков среди всех равна приблизительно $\frac{3}{20} = 0,15$, то есть 15%.

ПРИМЕР 4. Оценивать доли по выборке можно не только с помощью таблиц, но и используя гистограммы. На диаграмме 28 гистограмма «Рост девушек», сделанная по случайной выборке объёмом 300 наблюдений (см. п. 16).

Найдём примерную долю девушек ростом менее 164 см. Нужно сложить высоты столбиков, соответствующих росту от 151 до 163 см (они выделены зелёным цветом). Вместо этого оценим на глаз (мы помним, что диаграммы предназначены для наглядного представления данных) долю площади, которую занимают зелёные столбики. Явно больше, чем треть, но меньше половины. Можно считать, что по нашим выборочным данным доля девушек ростом менее 164 см — около 40%.

Диаграмма 28. **Рост девушек**



Вопросы

1 Что такое статистическая устойчивость?

2 Что значит оценить величину?

3 Почему сделанные с помощью выборки оценки нельзя считать точными значениями?

4 Для измерения роста мужчин взяли две выборки: одну — в Нидерландах, а другую — во Вьетнаме. Как вы думаете, можно ли считать, что эти выборки близки по своим свойствам? Почему?

Задачи

106 Пользуясь таблицей 47, найдите, сколько примерно времени на протяжении суток напряжение в сети:

а) меньше, чем 230 В;

б) отклоняется от 220 В не больше чем на 5 В.

Считайте, что дневное время с 11:00 до 17:00, то есть 6 часов.

107 В гипермаркет привезли 200 коробок шоколадных батончиков, в точности таких, как мы обсуждали в п. 11. В каждой коробке 24 батончика. Пользуясь таблицей 32, оцените, сколько примерно в этих коробках батончиков массой от 49 до 51 г.

108 Можно ли использовать данные диаграммы 21 для того, чтобы оценить, сколько примерно дней следующим летом в Москве атмосферное давление будет меньше 747 мм рт. ст.? Объясните свой ответ.

109 В университетской баскетбольной секции занимается 100 девушек. Можно ли оценить, сколько среди них девушек ростом 174—178 см, пользуясь таблицей 45 или диаграммой 28? Объясните свой ответ.

110 Ольге 18 лет, и её рост равен 172 см. Пользуясь диаграммой 28, оцените, сколько процентов Ольгиных сверстниц:

а) имеют примерно такой же рост;

б) не выше Ольги.

111 В архитектурном институте учится в общей сложности 450 студенток. Сколько примерно среди них девушек ростом 167—168 см? Сделайте оценку, используя данные:

а) таблицы 45; б) диаграммы 28.

Сравните полученные числа. Можно ли считать их близкими? Какая из двух сделанных оценок, на ваш взгляд, с большей вероятностью ближе к истинной доле девушек указанного роста?

112 Рассмотрите диаграмму 24, на которой показано распределение длительности телефонных разговоров. Оцените с помощью этой диаграммы долю телефонных разговоров длительностью:

а) менее одной минуты;

б) менее двух минут;

в) от двух до пяти минут.

Указание. Удобно использовать линейку, чтобы сначала узнать, сколько миллиметров приходится на одно деление вертикальной шкалы. Затем достаточно сложить длины соответствующих столбиков или их частей.

113 Рассмотрите таблицу 42, где сгруппированы наблюдения атмосферного давления летом 2019 г. в Москве. По данным этой таблицы

а) с помощью теоремы (с. 60) оцените среднее значение атмосферного давления в Москве летом;

б) оцените медианное значение давления;

в) оцените количество летних дней, когда давление отличается от медианного не более чем на 10 мм рт. ст. в меньшую или в большую сторону.

114 Если найти среднее значение атмосферного давления летом в Москве по данным таблицы 42 (задача 113, а), то полученное значение будет отличаться от среднего значения 746,32 мм рт. ст, которое получается, если данные не группировать (см. табл. 41).

а) Выразите отличие в процентах от величины среднего давления. Как вы думаете, является ли различие между этими двумя величинами существенным?

б) Чем объясняется расхождение между средними значениями, полученными без группировки и с группировкой данных?

115 Массив некоторых числовых данных сгруппировали шагом 10. По этим сгруппированным данным нашли среднее значение. Оно получилось равным 224,5. Можно ли утверждать, что настоящее среднее значение:

а) находится между 224 и 225;

б) больше, чем 220;

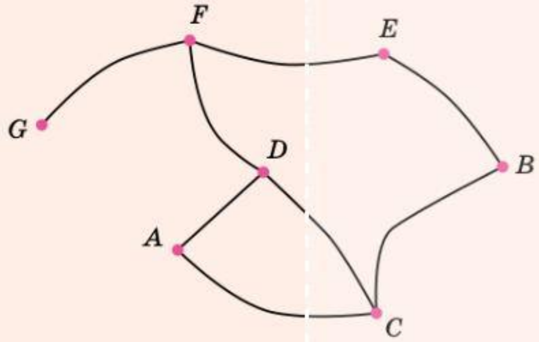
в) меньше, чем 234,5?

В какой промежуток истинное среднее значение попадает наверняка?

IV Графы

Граф состоит из точек и соединяющих их линий. Графы помогают решать самые разные задачи из самых разных областей. Изучением свойств графов занимается математическая теория графов.

Специальные виды графов — циклы, цепи и деревья — удобны для описания случайных событий, которые изучаются в теории вероятностей.



18 Графы. Вершины и рёбра

19 Степень вершины

20 Пути в графе. Связанные графы

21* Задача о Кёнигсбергских мостах, эйлеровы пути и эйлеровы графы

18 Графы. Вершины и рёбра

На рисунке 8 изображены самые разные схемы: а) часть родословного дерева потомков Николая Бернулли[1]; б) схема молекулы химического вещества (глицерина); в) схема метро в Новосибирске; г) радиосхема простейшего радиоприёмника.

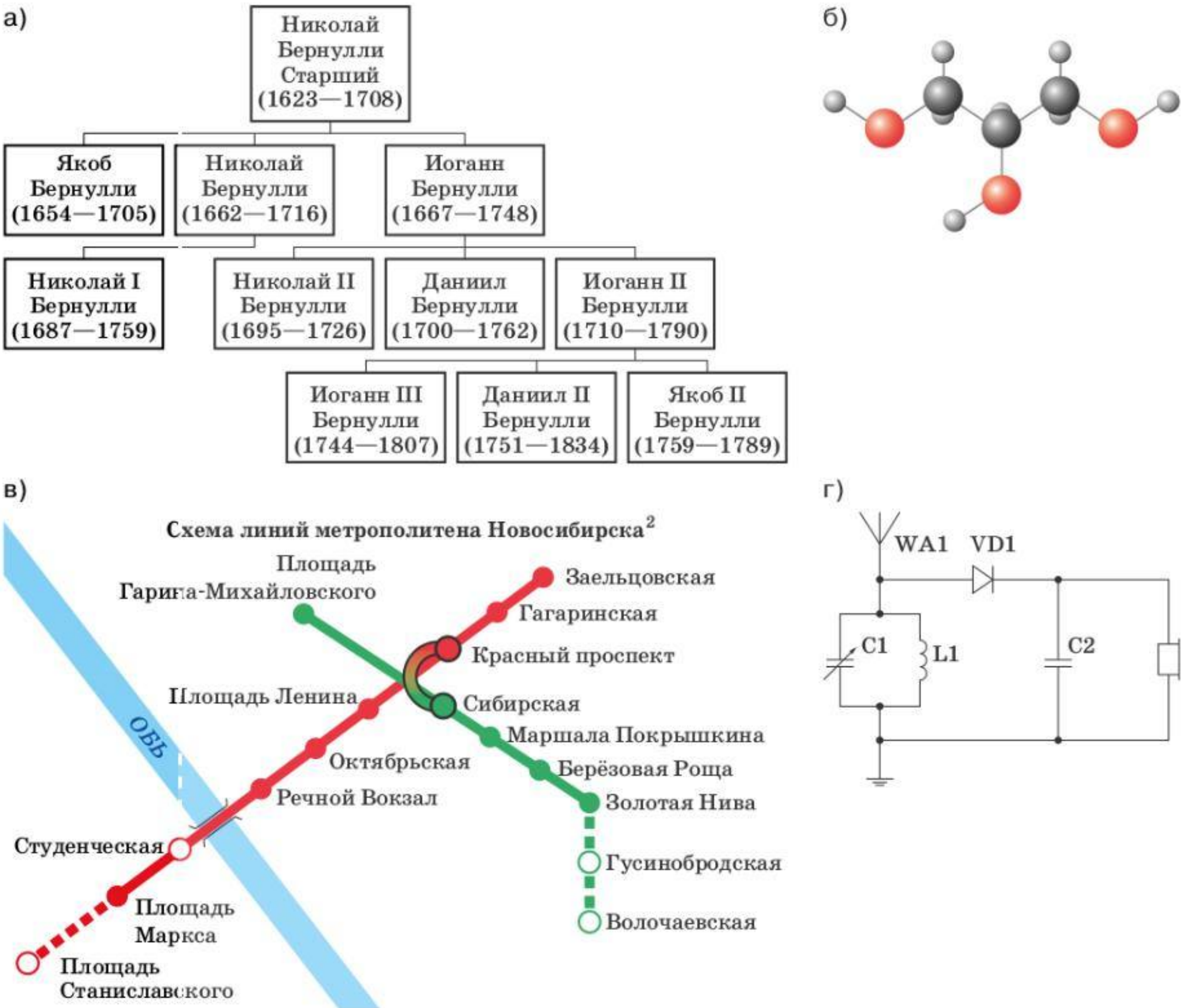


Рисунок 8

У всех этих схем есть общее — они показывают связи между отдельными элементами. В родословном дереве линия идёт от отца к сыну, схема молекулы показывает, в каком порядке связаны между собой атомы углерода, водорода и кислорода. На схеме метро связи — переходы и перегоны между соседними станциями, а радиосхема показывает, как соединить между собой радиодетали, чтобы получился работающий прибор.

Для изображения и изучения связей между различными объектами — предметами или понятиями — в математике применяется **граф**[3].

[1] Семья Бернулли дала миру девять известных физиков и математиков. Якоб Бернулли по праву считается одним из основателей современной теории вероятностей.

[2] По состоянию на январь 2022 г.

[3] Слово «граф» происходит от латинского слова *graphica* — «рисование», «черчение».

Граф — это изображение объектов и связей между ними с помощью точек и линий. Точки в графе называются **вершинами графа**. Некоторые (не обязательно все) вершины соединены линиями. Эти линии называются **рёбрами графа**.

Если вершина является концом ребра, говорят, что ребро **исходит** из этой вершины, или что оно **входит** в неё. Вершина не обязательно должна быть соединена рёбрами с другими вершинами. Вершину, из которой не выходит ни одно ребро, называют **изолированной**.

Каждая вершина в графе должна быть явно отмечена. На рисунке рёбра могут пересекаться, но точка пересечения не является вершиной графа. Это как две нитки: одна пересекает другую, но узелка в точке пересечения нет (рис. 9).

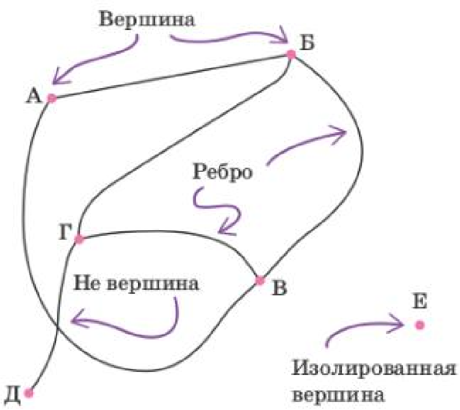


Рисунок 9. **Как устроен граф**

В графе важны только сами вершины и связи между ними; взаимное расположение вершин не важно. Можно представлять себе граф как пуговицы, соединённые длинными нитками. Пуговицы можно двигать как угодно, лишь бы нитки не рвались. Например, на рисунках 9 и 10 показаны два графа, полученные друг из друга «движением вершин». Проверьте, что вершины в обоих графах связаны одинаково. Такие графы мы будем считать одинаковыми.

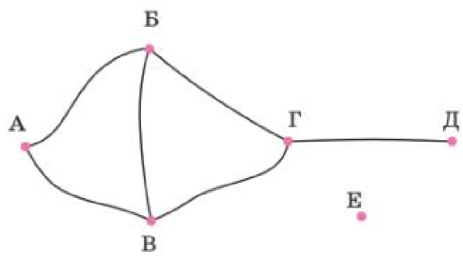


Рисунок 10

Если вершин и рёбер много, определить, одинаковы ли графы на разных рисунках, непросто.

Если в двух графах вершины связаны рёбрами в одном и том же порядке, то один граф можно получить из другого, передвигая вершины. Такие графы мы считаем одинаковыми.

ПРИМЕР 1. На рисунках 11 и 12 изображены одинаковые графы или различные? И в том, и в другом графе рёбра одни и те же: АВ, ВЖ, ВЕ, БЗ, БД, ДГ, ЖЕ и ГЗ.

Нам удалось показать, что вершины в этих двух графах связаны одинаково. Значит, графы одинаковы.

Граф на рисунке 12 удобнее. Видно, что он состоит из двух не связанных частей.

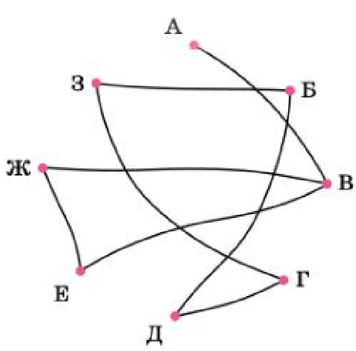


Рисунок 11

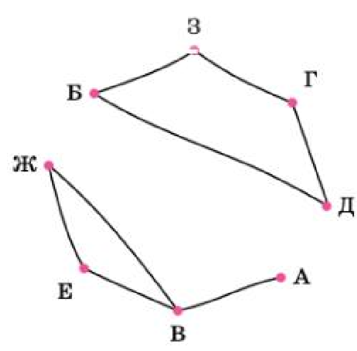


Рисунок 12

Нужно стараться изображать графы как можно проще и яснее. Если с первого раза не получилось, лучше перерисовать граф в более удобном виде.

ПРИМЕР 2. В архипелаге шесть островов и шесть мостов: мост между островами Адуак и Бани, мост между островами Адуак и Видо, между островами Бани и Видо, между островами Екити и Гауту, между Бани и Джеми и между Видо и Джеми. Можно ли по мостам перейти с острова Адуака на остров Гауту?

Построим граф. Острова изобразим вершинами, а мосты — рёбрами. Если нарисовать граф подходящим образом (рис. 13), то ответ очевиден: нельзя.

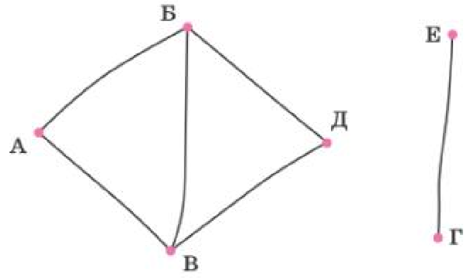


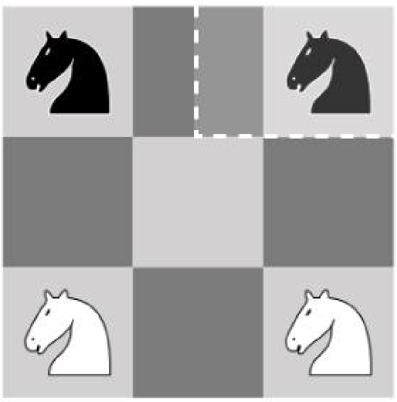
Рисунок 13

ПРИМЕР 3. Два чёрных и два белых коня стоят в углах шахматной доски 3×3, чёрные вверху, а белые внизу (рис. 14). Можно ли, передвигая их по шахматным правилам, поставить белых коней в два противоположных угла, а чёрных — в два других противоположных угла (рис. 15)?

Решение. Обозначим поля шахматной доски 3×3 буквами (рис. 16) и построим граф игры. Поля изобразим вершинами. Если из одного поля ходом коня можно попасть в другое поле, то соответствующие вершины свяжем ребром. Кони изображены рядом с теми вершинами, в которых они находятся в начале (рис. 17).

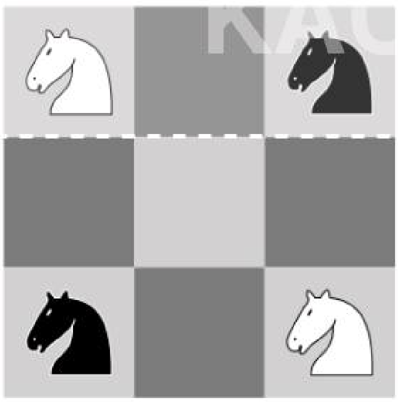
Вопрос теперь стоит иначе: можно ли передвинуть коней вдоль рёбер графа из положения «Старт» в положение «Финиш» (рис. 18)? На старте два белых коня рядом, и два чёрных тоже рядом; а на финише цвета коней чередуются. Чтобы пройти от старта к финишу, в какой-то момент придётся поставить белого и чёрного коня на одно и то же поле, а это не разрешается шахматными правилами.

Ответ: нельзя.



Старт

Рисунок 14



Финиш

Рисунок 15

Рисунок 16

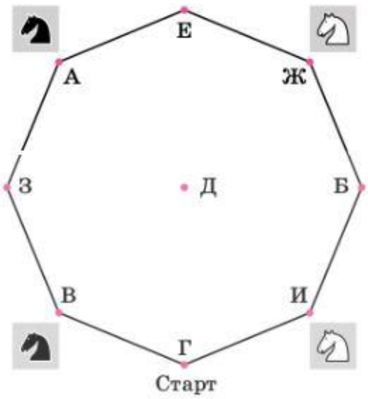


Рисунок 17

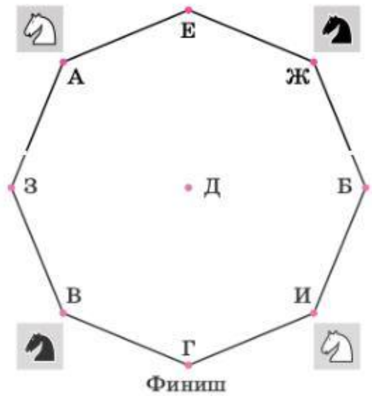


Рисунок 18

Как видите, иногда графы позволяют очень просто решать довольно хитрые и необычные задачи.

Вопросы

1 Вспомните, где вам встречались графы.

2 Как называются линии, связывающие вершины графа?

3 Как можно проверить, одинаковы два графа или нет?

Задачи

116 На рисунке 19 изображены графы. Сколько у каждого из них рёбер; вершин; изолированных вершин?

117 Одинаковы ли графы, изображённые на рисунке 20?

118 Нарисуйте три разных графа, в каждом из которых 3 вершины.

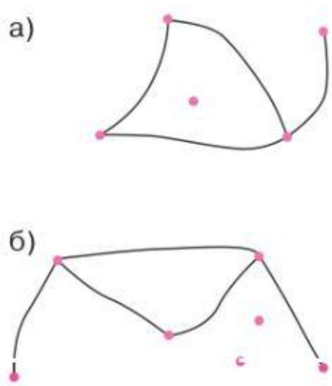


Рисунок 19

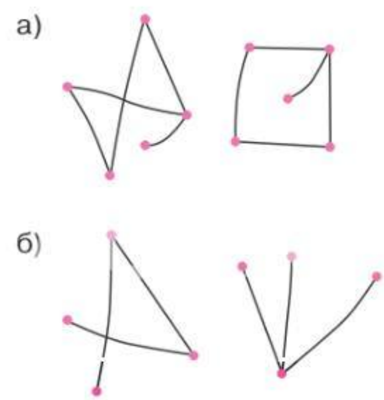


Рисунок 20

119 Нарисуйте четыре разных графа, в каждом из которых 4 вершины.

120 На рисунке 21 изображён граф. С помощью движения вершин изобразите этот граф так, чтобы рёбра не пересекались во внутренних точках (получатся два одинаковых графа).

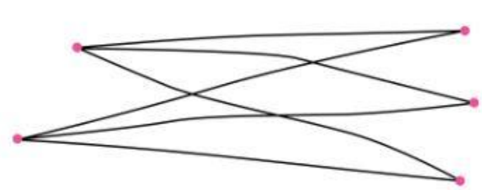


Рисунок 21

121 Каждый федеральный округ Российской Федерации объединяет несколько регионов, например областей или республик. Можно построить граф смежности, изображая регионы вершинами. Две вершины связаны ребром, если соответствующие регионы имеют участок сухопутной границы. На рисунках 22 и 23 изображены карты Дальневосточного (рис. 22) и Приволжского (рис. 23) федеральных округов.

Рисунок 22

Рисунок 23

Постройте граф смежности регионов:

а) для ДВФО; б) для ПФО.

Есть ли в графе изолированная вершина?

19 Степень вершины

ПРИМЕР 1. Одноклассники Андрей, Борис, Вадим, Григорий, Дмитрий и Евгений устроили турнир по настольному теннису и решили играть каждый с каждым. Турнир ещё не закончен. Рёбра графа (рис. 24) показывают, кто с кем сыграл к этому моменту.

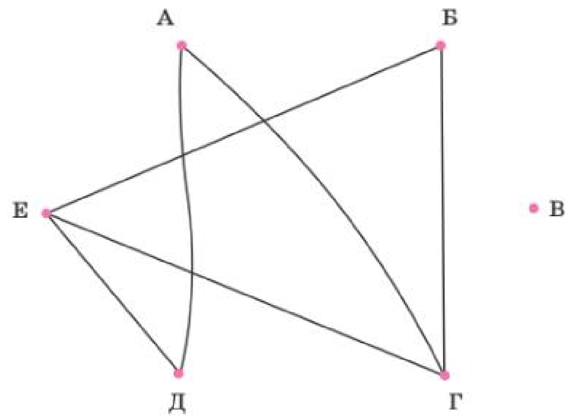


Рисунок 24

Больше всех партий сыграли Евгений и Григорий — по три партии. Вадим пока не сыграл ни одной партии, а Андрей, Борис и Дмитрий сыграли по две. Можно сказать, что в графе на рисунке 24 степень вершины В равна 0, степени вершин А, Б, Д равны 2, а степени вершин Г и Е равны 3.

Степень вершины в графе — это количество исходящих из неё рёбер. Иногда степень вершины называют **валентностью вершины**.

Иногда приходится рассматривать граф с петлёй, то есть ребром, которое исходит из вершины и входит в неё же, то есть соединяет вершину саму с собой. При подсчёте степени вершины такое ребро считается дважды. На рисунке 25 показан граф с петлёй. Степень вершины *C* равна 4.

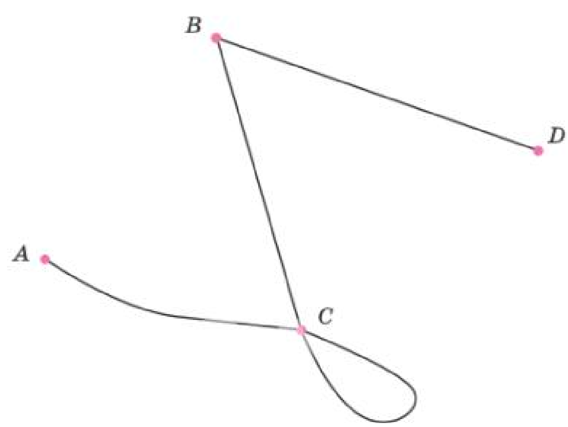


Рисунок 25. **Граф с петлей в вершине *C***

В п. 18 вы узнали, как доказать, что два графа одинаковы: нужно показать, что в них поровну вершин и рёбра в одном графе соединяют вершины так же, как в другом.

А если не получается? Значит ли это, что графы не одинаковые? Может быть, мы просто не сумели найти подходящее соответствие? Доказать, что два графа не являются одинаковыми, часто можно, подсчитывая степени вершин.

ПРИМЕР 2. На рисунке 26 два графа. В них по 4 вершины и по 3 ребра. Но эти графы не одинаковы: на рисунке 26, *а* есть вершина степени 3, а на рисунке 26, *б* такой вершины нет.

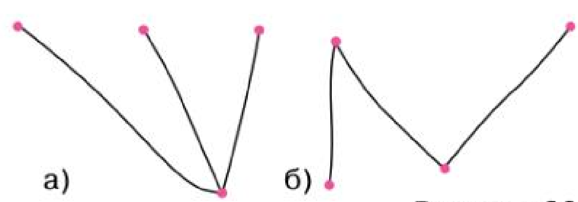


Рисунок 26

Если в двух графах поровну вершин и поровну рёбер, то такие графы не обязательно одинаковы.

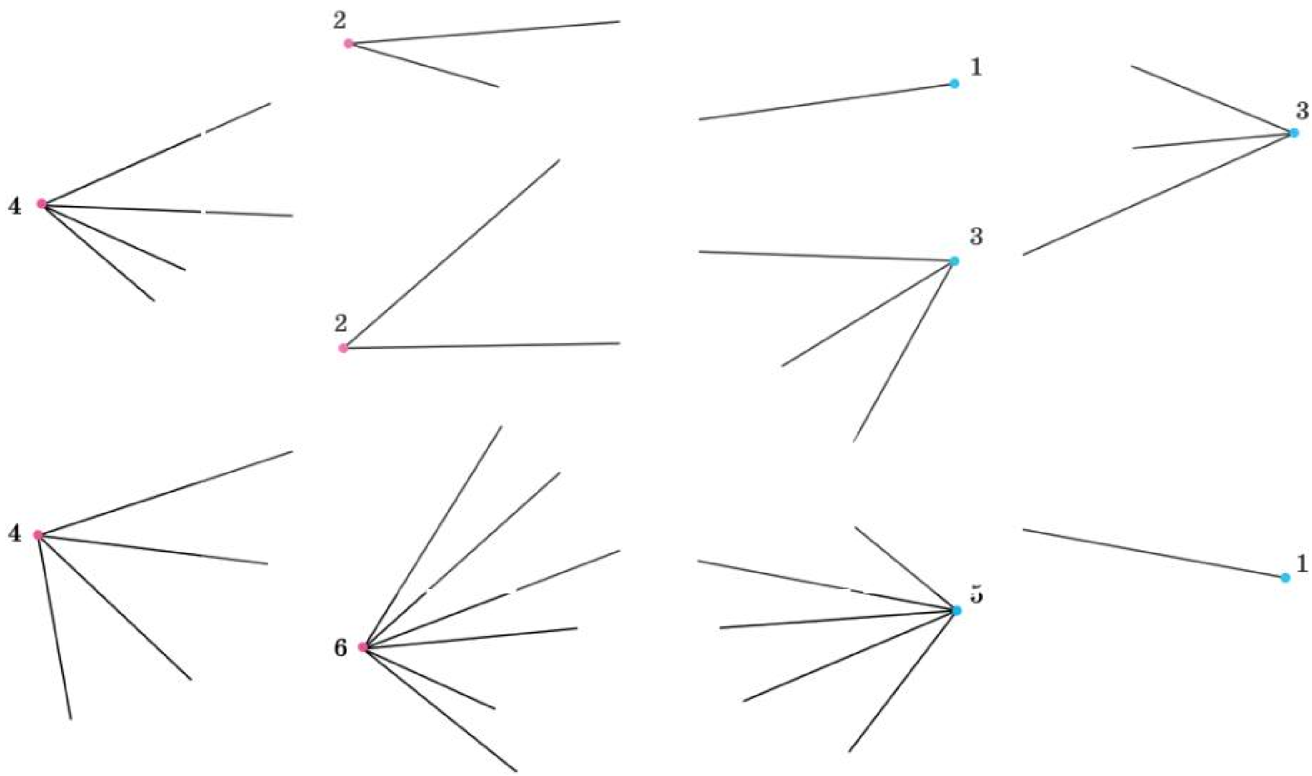
У каждого ребра два конца, поэтому сумма степеней всех вершин в два раза больше числа рёбер, то есть чётное число. Мы доказали теорему о сумме степеней всех вершин.

Теорема о сумме степеней вершин. В любом графе сумма степеней всех вершин является чётным числом.

ПРИМЕР 3. (Задача о рукопожатиях.) Во время встречи некоторые участники пожали руки другим. Докажите, что количество участников, сделавших *нечётное* число рукопожатий, *чётно*.

Решение. Представим себе граф рукопожатий: каждого участника обозначим вершиной, а тех, кто пожал друг другу руки, соединим ребром.

Пускай во встрече участвовало n человек, которые пожали руки другим чётное число раз, и k человек, которые сделали нечётное число рукопожатий. Тогда в графе оказывается ровно n вершин чётной степени и k вершин нечётной степени. На рисунке 27 мы схематически показали вершины чётной и нечётной степеней разными цветами и подписали степень около каждой вершины.



Красные вершины имеют чётные степени, а синие вершины имеют нечётные степени. Соединить «обрывки» рёбер так, чтобы получился граф, невозможно, поскольку сумма степеней на этом рисунке нечётная

Рисунок 27

Сумма степеней у n вершин чётной степени чётная, потому что чётны все слагаемые.

Предположим, что число k нечётное. Тогда сумма степеней этих k вершин также нечётна, поскольку это сумма нечётного числа нечётных слагаемых.

Значит, общая сумма степеней всех вершин графа будет нечётной (чётное число плюс нечётное). А это невозможно — мы знаем, что в любом графе сумма степеней вершин чётная.

Задача о рукопожатиях приводит нас к следующему общему утверждению.

Свойство
В любом графе количество вершин нечётной степени чётно.

Вопросы

1 Что такое степень вершины графа?

2 Может ли степень вершины равняться 0?

3 Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин.

4 Существует ли граф, в котором только 3 вершины со степенями 1, 2 и 2? Приведите пример такого графа или объясните, почему такого не может быть.

Задачи

122 На рисунке 13 (с. 80) изображён граф. Найдите степень вершины:
а) А; б) Б.

123 На рисунках 19, *а* и 19, *б* (с. 81) изображены графы. Сколько у каждого из них вершин степени 0, степени 1 и степени 2?

124 Нарисуйте какой-либо граф, в котором 5 вершин со степенями 1, 2, 2, 3, 3.

125 Придумайте и нарисуйте два неодинаковых графа, в каждом из которых 6 вершин со степенями 1, 1, 2, 2, 3, 3.

126 Может ли количество вершин нечётной степени в каком-нибудь графе равняться:
а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4?

127 На конференцию собрались учёные. Могло ли оказаться так, что пятеро из них знакомы ровно с тремя другими, а все остальные имеют ровно четверых знакомых среди собравшихся?

128 Придумайте и нарисуйте 3 неодинаковых графа, в каждом из которых по 6 рёбер. Найдите сумму степеней всех вершин каждого из этих графов.

129 Докажите, что сумма степеней всех вершин графа вдвое больше числа рёбер в этом графе.

130 В некотором графе 6 вершин, степени которых равны:
а) 2, 2, 3, 3, 4, 4;
б) 0, 1, 2, 2, 3, 4.
Сколько всего рёбер в этом графе?

20 Пути в графе. Связные графы

Цепи и циклы

Предположим, что в некотором графе можно по рёбрам «пройти» из вершины A в вершину B, то есть существует последовательность рёбер, соединяющих вершины A и B. Такую последовательность называют **путём** из вершины A в вершину B.

В графе, показанном на рисунке 28, есть несколько путей из вершины A в вершину B.

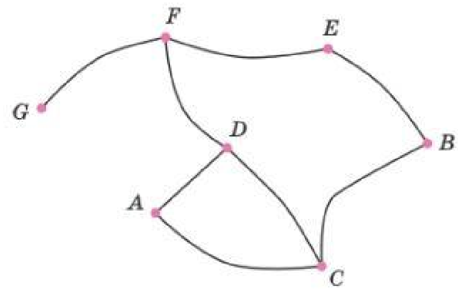


Рисунок 28

Например, есть путь, состоящий из рёбер AC и CB. Этот путь можно обозначить тремя буквами — ACB. Есть более длинный путь $ADFEB$. Можно придумать более сложный путь, который заставит нас немного «покружить», — $ADCADCB$.

В путях ACB и $ADFEB$ вершины не повторяются. Такие пути называют **простыми путями** или **цепями**. Путь $ADCADCB$ идёт «по кругу», проходя дважды через вершины A, D и C.

Цепь (простой путь) — это путь в графе из одной вершины в другую, в котором вершины и рёбра не повторяются.

Если граф состоит из одной-единственной цепи, то такой граф также называют **цепью**.
Граф без рёбер, состоящий из единственной вершины, также считают цепью.

Иногда возникает необходимость выйти из вершины и вернуться в неё же. Такие возвращающиеся в начальную точку пути называют **циклами**.

Цикл в графе — это замкнутый путь, у которого начало и конец в одной вершине, а рёбра и промежуточные вершины не повторяются.

Простейший цикл — петля, которая состоит из одной вершины и одного ребра (см. рис. 25).

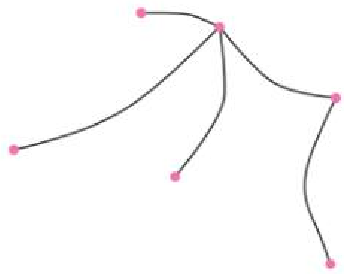
Начальной вершиной цикла можно считать любую вершину. Граф на рисунке 28 имеет цикл $ADCA$. Этот же цикл можно обозначить $DCAD$, или $CADC$, или просто ADC, как мы обычно обозначаем треугольники в геометрии. В этом графе есть ещё цикл $DCBEF$. Найдите ещё один цикл в этом же графе.

Если граф состоит из одного-единственного цикла, то такой граф также называют **циклом**.

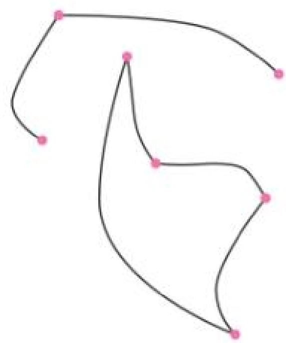
Связные графы

Граф называется **связным**, если две любые вершины в этом графе соединены путём.

На рисунке 29 показаны два графа — слева связный, а справа — несвязный, который можно представить как два отдельных связных графа.



а) Связный граф



б) Несвязный граф

Рисунок 29

Вопросы

1 Своими словами объясните, что такое путь в графе.
2 Объясните, что такое цепь.
3 Может ли в цепи рёбер быть больше, чем вершин?
4 Объясните, что такое цикл.
5 Может ли в цикле рёбер быть меньше, чем вершин?
6 Какой граф называют связным?

Задачи

131 Есть ли в графе, изображённом на рисунке 30, путь:
а) из вершины A в вершину C; б) из вершины B в вершину F?
Связный ли это граф?

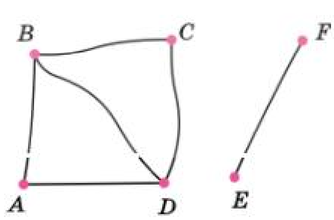


Рисунок 30

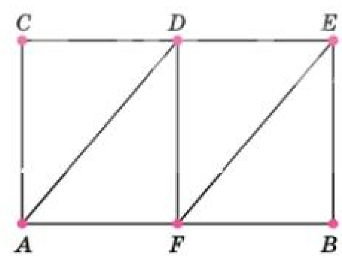


Рисунок 31

132 Рассмотрите граф на рисунке 31. Запишите какие-нибудь три цепи, ведущие из вершины A в вершину B.

133 Найдите на рисунке 31 три разных цикла.

134 Рассмотрите рисунок 32 и выпишите номера графов, которые являются:
а) цепями; б) циклами; в) несвязными графами.

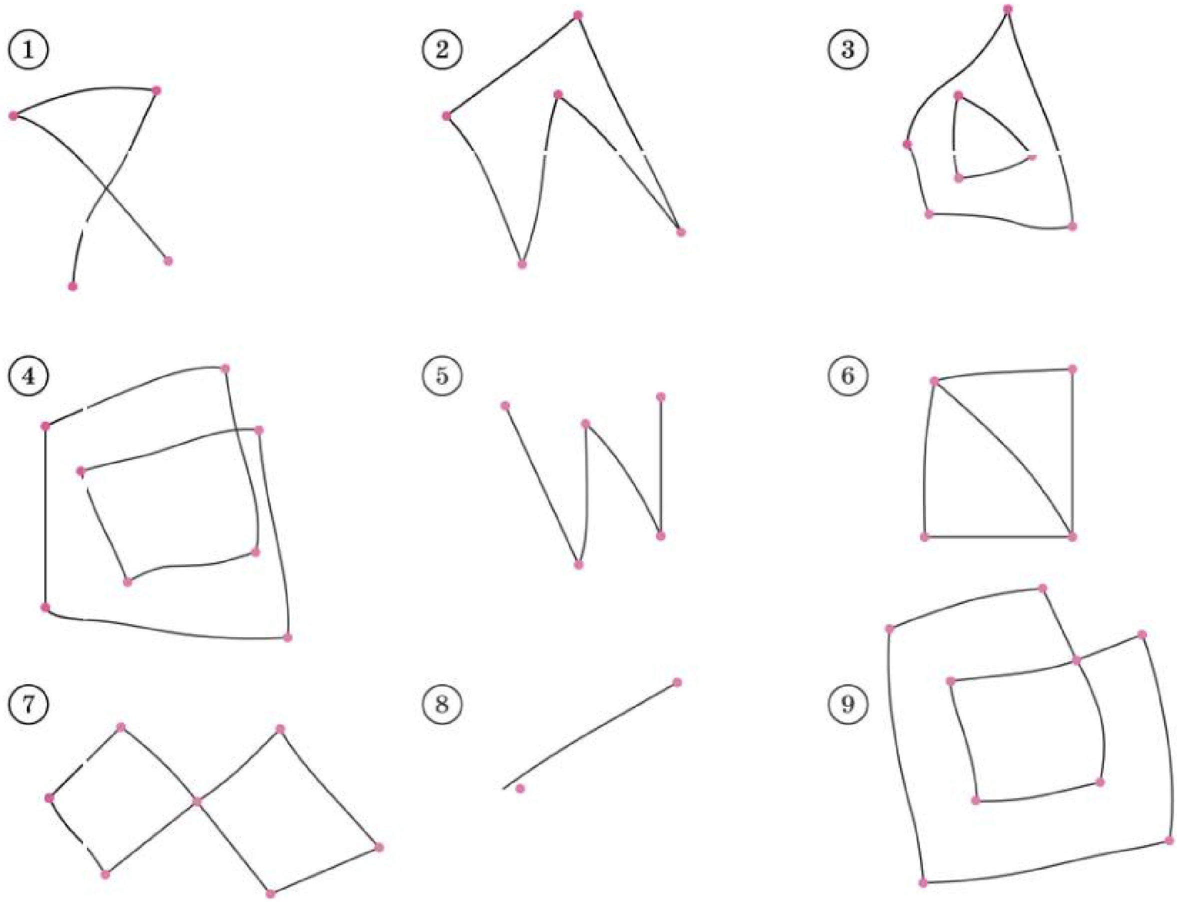


Рисунок 32

135 Укажите, какие графы на рисунке 32 содержат цикл.

136 Изобразите какой-нибудь граф, у которого:

а) три цикла длин 3, 4 и 5;

б) два цикла длины 4 и один цикл длины 6.

137 Изобразите два графа с шестью вершинами степени 2: один связный, а другой — нет.

138 В деревне 9 домов. Соседними будем считать участки, у которых есть общий забор. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Дмитрию и Никите, а также по соседству живут Евгений с Никитой, Иван с Сергеем, Евгений с Дмитрием и Сергей с Антоном и больше соседей в деревне нет. Может ли Пётр, перелезая через заборы соседних участков, пробраться на участок к Никите?

139 В Солнечной системе введено космическое сообщение. Корабли осуществляют рейсы в обе стороны по следующим маршрутам:

Земля — Меркурий, Марс — Венера, Уран — Нептун, Марс — Меркурий, Юпитер — Плутон, Меркурий — Венера, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Плутон — Уран.

Можно ли добраться с Земли до Плутона?

140 Архипелаг Числовой состоит из 9 островов, у которых вместо названий номера от 1 до 9. Между двумя островами есть паромная переправа тогда и только тогда, когда сумма номеров этих островов делится на 3. Можно ли перебраться на паромах с острова 3 на остров 4?

Указание. Постройте граф. Вершины-острова соедините рёбрами-переправами.

141 Можно ли выписать в ряд натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы сумма любых двух, стоящих рядом, делилась на 5 или на 12?

Указание. Постройте граф, соединив рёбрами числа, которые могут стоять рядом. Затем найдите какую-нибудь цепь в этом графе, проходящую через все рёбра.

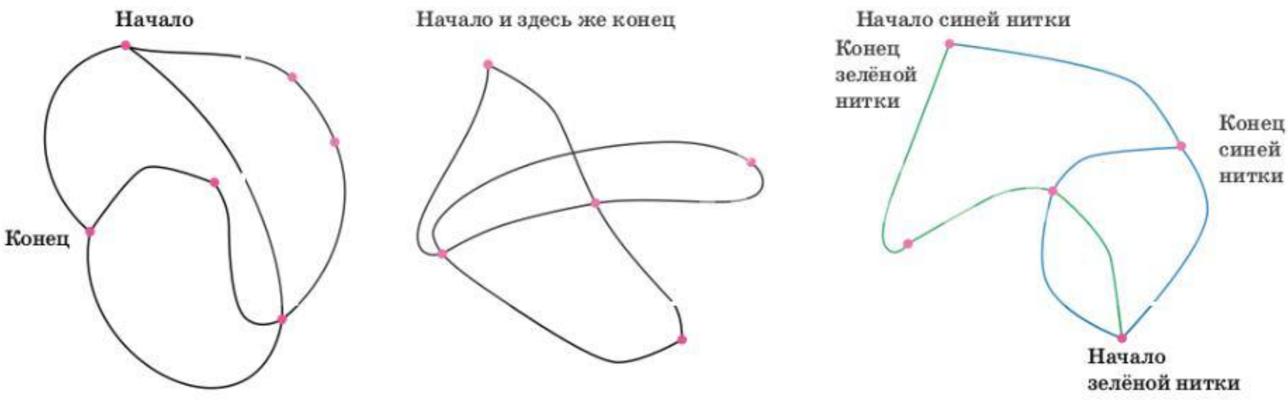
21* Задача о Кёнигсбергских мостах, эйлеровы пути и эйлеровы графы

Представим себе, что мы не рисуем какой-то связный граф карандашом, а выкладываем с помощью нитки, начав с какой-то вершины. Промежуточные вершины мы «проходим» насквозь: нитка входит в вершину и выходит из неё. При этом к степени вершины добавляется число 2. Значит, любая промежуточная вершина будет иметь чётную степень. Исключение могут составлять только две вершины — начальная и конечная. Если они различны, то их степени нечётны (один конец нитки в начальной вершине, а другой — в конечной).

Получается, что если в связном графе больше чем две вершины с нечётной степенью, то такой граф одной ниткой не выложить.

На рисунке 33 показаны три графа из ниток. Первые два удалось выложить одной ниткой, а третий — нет. Потребовалось две нитки.

Эйлеров граф — это граф, в котором существует **эйлеров путь**, то есть путь, проходящий ровно один раз по каждому ребру.



а) Граф из одной нитки. Две вершины с нечётными степенями

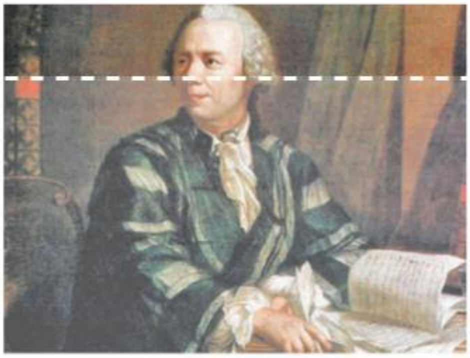
б) Граф из одной нитки. Начало и конец нитки совпадают. Все вершины имеют чётную степень

в) В графе четыре вершины с нечётной степенью. Такой граф можно выложить только двумя нитками

Рисунок 33

Таким образом, графы на рисунках 33, *а* и 33, *б* эйлеровы, а граф на рисунке 33, *в* не является эйлеровым.

Название «эйлеров» объяснить легко. По сути, мы доказали теорему, которую задолго до нас доказал Леонард Эйлер[1], решая знаменитую задачу о семи Кёнигсбергских мостах.


Леонард Эйлер

В старинном городе Кёнигсберге (ныне Калининград) семь мостов через реку Преголя, которую во времена Эйлера называли Прегель (рис. 34). Древняя городская легенда гласила, что тот, кто сумеет обойти весь город, ровно по разу побывав на каждом из семи мостов, обретёт счастье и богатство. Кто только ни пытался это сделать, но никому не удавалось.

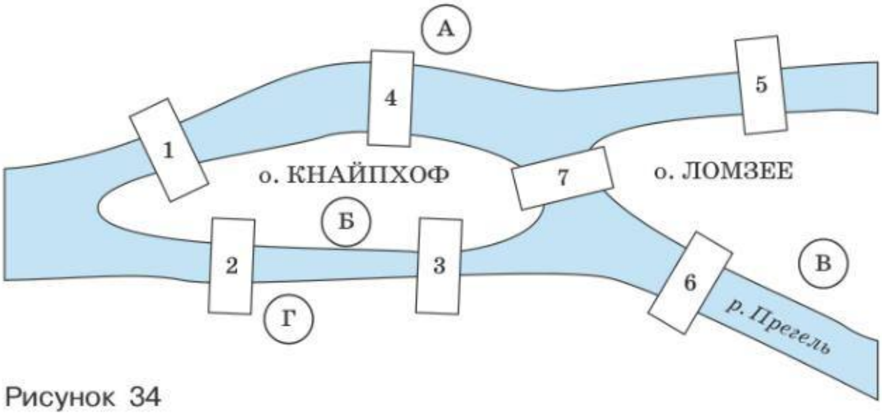


Рисунок 34

Леонард Эйлер доказал, что пройти по каждому из семи мостов ровно один раз невозможно, откуда бы путник ни начинал свой путь. На самом деле Эйлер решил более общую задачу, доказав следующую теорему.

Теорема. Если в графе существует путь, проходящий через все рёбра ровно по одному разу, то в этом графе не больше двух вершин нечётной степени.

Эту теорему мы уже доказали рассуждением о выкладывании графа с помощью нитки. Верно и обратное утверждение: если в графе не больше двух вершин нечётной степени, то в этом графе существует путь, проходящий через все рёбра ровно один раз. Оставим это утверждение без доказательства.

Теперь мы тоже можем решить задачу о мостах. Участки суши изобразим вершинами, мосты — рёбрами графа (рис. 35). Посмотрите ещё раз на план города и убедитесь, что мосты на графе показаны верно.

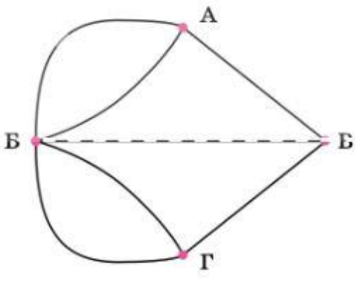


Рисунок 35

[1] Леонард Эйлер — великий математик. Эйлер родился в Швейцарии в 1707 г. В 1727 г. Эйлер приехал в Санкт-Петербург. Вклад Эйлера в мировую математику огромен и неоценим. В России Эйлер принимал участие в создании университета при Петербургской академии наук, писал учебники, возглавлял работу по созданию первого географического атласа России.

В получившемся графе все четыре вершины имеют нечётную степень: вершины А, В и Г имеют степень 3, а вершина Б — степень 5. Значит, обойти такой граф эйлеровым путём невозможно.

Вопросы

1 Что такое эйлеров путь и какие графы называют эйлеровыми?

2 Может ли эйлеров граф быть несвязным?

3 Может ли в эйлеровом графе не быть вершин нечётной степени? Может ли быть только одна вершина нечётной степени; две вершины нечётной степени; три или больше?

Задачи

142 Какими цифрами на рисунке 36 обозначены эйлеровы графы?

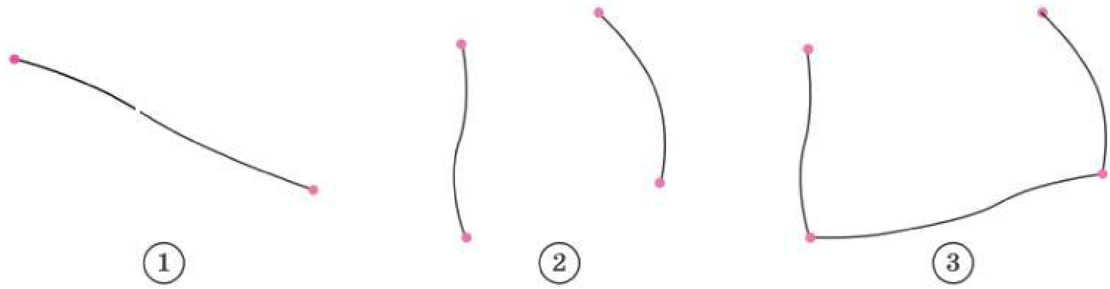


Рисунок 36

143 Какими цифрами на рисунке 37 обозначены эйлеровы графы?

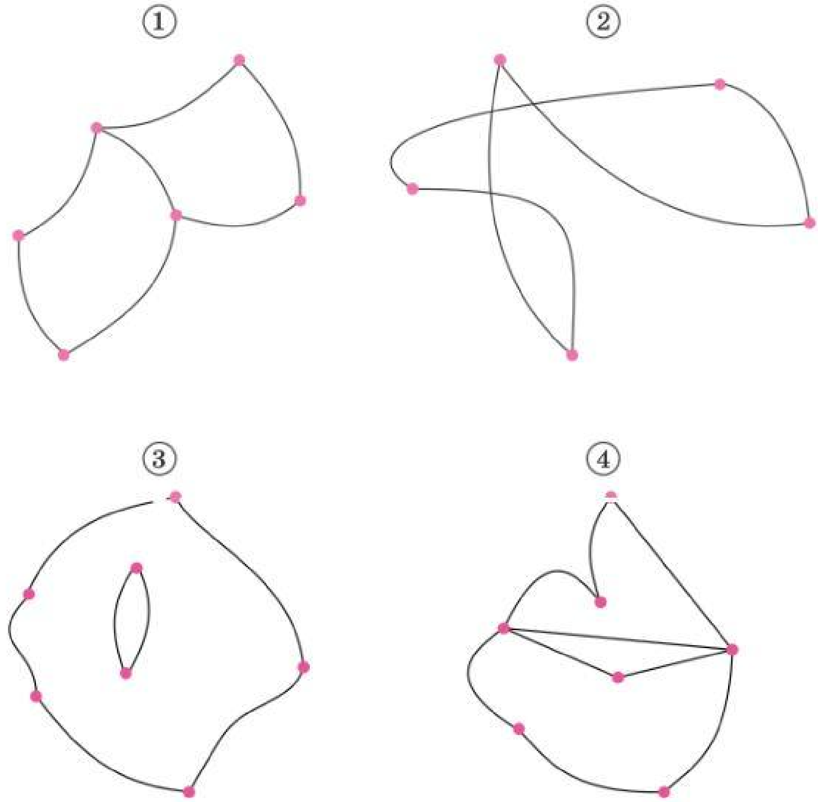


Рисунок 37

144 Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды, нарисуйте фигуры, изображённые на рисунке 38.

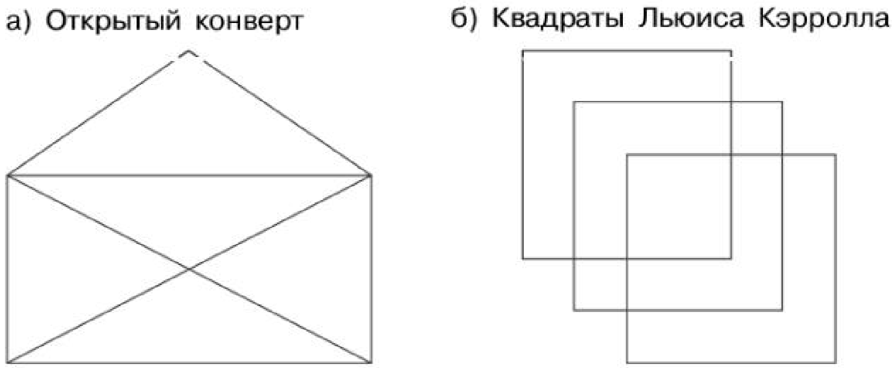


Рисунок 38

145 Придумайте способ обвести фигуру, изображённую на рисунке 39, одним росчерком (не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды).

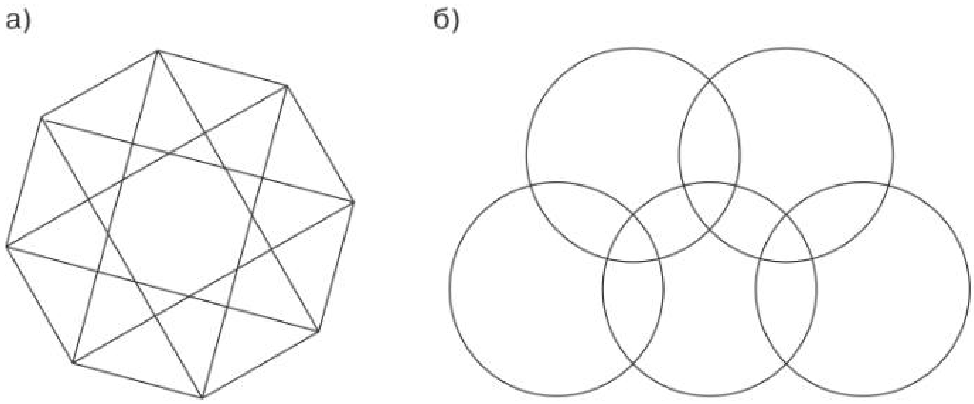


Рисунок 39

146 Пять участков отделены друг от друга заборами (см. план на рис. 40). Можно ли побывать на каждом участке, но при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

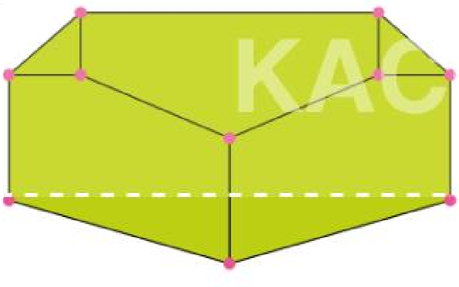


Рисунок 40. **Участки и заборы**

147 В Изумрудном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются.

а) Начертите возможный план Изумрудного города.

б) Можно ли устроить экскурсию по всем улицам и площадям Изумрудного города, не проходя ни по одной улице дважды?

V Логические утверждения и высказывания

Мы всё время имеем дело с утверждениями. Про некоторые можно сказать, что они истинные, про другие — что они ложные. Встречаются утверждения, в которых мы сомневаемся или воспринимаем их как шутку. Любое рассуждение, которое проводит человек, является последовательностью или комбинацией утверждений, которые следуют друг из друга или из других утверждений. Разобраться в том, как должно быть устроено верное рассуждение, например доказательство теоремы, помогает логика. Логика — раздел математики, изучающий утверждения и то, как они связаны между собой.

22 Утверждения и высказывания

23 Отрицание

24 Условные утверждения

25 Обратные и равносильные утверждения. Признаки и свойства. Необходимые и достаточные условия

26* Противоположные утверждения. Доказательство от противного

22 Утверждения и высказывания

С детских лет мы учимся отличать правду от лжи. Мы хотим иметь разумные представления об окружающем мире, а для этого надо пользоваться правдивой информацией. Однако иногда одного здравого смысла может не хватить для того, чтобы понять или объяснить, почему то или иное утверждение истинно или ложно. Нужны правила рассуждений, которые позволяют из верных утверждений получать другие верные утверждения.

Всегда ли мы можем сказать, истинно утверждение или нет?

ПРИМЕР 1. О каких из этих утверждений можно сказать, истинны они или нет?

а) «$5 \cdot 5 = 25$».

б) «Через точку на плоскости можно провести прямую, перпендикулярную другой прямой».

в) «Существует такое число b, что $b + 1 = b - 1$».

г) «Мы — молодцы!»

д) «28 мая 2017 года состоялся первый полёт российского самолёта МС-21».

е) «Утверждение, которое вы сейчас читаете, ложно».

Первые два утверждения истинны, а третье — ложно, и это не вызывает сомнений. Трудно что-то сказать про утверждение г). Если уточнить, кто такие «мы» и кого следует считать молодцами, то можно будет решить, истинно это утверждение или нет.

Утверждение д) легко проверить. Оно истинно. Утверждение е) внутренне противоречиво. Оно не может быть ни истинным, ни ложным: если оно истинно, то оно ложно. А если мы предположим, что оно ложно, то должны признать, что оно ложным не является.

Особую важную роль в математике играют утверждения, о которых можно определённо судить, истинны они или ложны. Такие утверждения называют **высказываниями**.

Высказывание — это утверждение, которое либо истинно, либо ложно.

ПРИМЕР 2. Какие из следующих утверждений являются истинными высказываниями, а какие — ложными?

а) «**У всех** кошек чёрная шерсть».

б) «**Любая** река впадает в море».

в) «**Существуют** медведи, живущие за Полярным кругом».

г) «**Некоторые** птицы живут в городе».

д) «**Ни одна** птица не живёт в городе».

Все эти утверждения содержат вспомогательные слова **«любой»**, **«все»**, **«некоторые»**, **«существует»**, **«ни одно»**, которые влияют на смысл сказанного.

Слова **«любой»**, **«все»**, **«каждый»** и т. п. подразумевают, что нет исключений. Существует ли река, впадающая не в море? Да. Например, Ангара, которая впадает не в море, а в реку Енисей. С помощью примера мы показали, что утверждение б) «**Любая** река впадает в море» ложно. Такие опровергающие примеры называют **контрпримерами**.

Контрпример — пример, противоречащий утверждению.

Контрпримером к утверждению а) «**У всех** кошек чёрная шерсть» служит кошка любого другого цвета, например рыжая (рис. 41).

Чтобы опровергнуть утверждение, содержащее вспомогательные слова **«ни один»**, **«никакой»** или **«не существует»**, тоже достаточно контрпримера. Утверждение д) «**Ни одна** птица не живёт в городе» является ложным высказыванием. Чтобы это показать, достаточно вспомнить, что на улицах городов есть голуби и воробьи.

Рисунок 41. **Контрпример к утверждению «У всех кошек чёрная шерсть»**

Если утверждение содержит слова **«существует»**, **«какой-то»**, **«некоторые»**, **«хотя бы один»**, **«найдётся»** и т. п., то показать истинность этого утверждения можно с помощью примера. Например, утверждение в) «**Существуют** медведи, живущие за Полярным кругом» истинно, потому что белые медведи действительно живут за Полярным кругом. Утверждение г) «**Некоторые** птицы живут в городе» тоже истинно.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим неравенство $25 + x < 38$.

Истинны или ложны утверждения?

а) «**Любое** значение x удовлетворяет этому неравенству».

б) «**Ни одно** значение x не удовлетворяет этому неравенству».

в) «**Существует** число, которое является решением этого неравенства».

г) «**Некоторые** числа являются решением этого неравенства».

Утверждения а) и б) ложны. Достаточно привести контрпримеры. Для утверждения а) контрпримером является, например, значение $x = 13$. В качестве контрпримера к утверждению б) можно взять значение $x = 0$.

Утверждения в) и г) истинны. Чтобы это обосновать, достаточно привести примеры решений неравенства. Обратите внимание: в утверждении г) спрашивается про некоторые числа. Говоря слово «некоторые», мы имеем в виду, что достаточно одного.

Вопросы

1 Что такое высказывание? Всякое ли утверждение является высказыванием?

2 Верно ли, что:

а) чтобы опровергнуть утверждение, достаточно привести контрпример, показывающий, что утверждение может быть ложным;

б) чтобы доказать утверждение, достаточно привести пример, когда оно истинно?

Задачи

148 Известно, что $x < 14$. Дано высказывание «Число x больше числа 9».

а) Можно ли утверждать, что это высказывание истинно? Если нет, приведите пример числа x, при котором высказывание ложно.

б) Может ли это высказывание быть истинным? Если да, приведите пример числа x, при котором это высказывание истинно.

149 Дано высказывание «Число x меньше числа 7».

а) Может ли данное высказывание быть истинным при $x > 6$? Если да, приведите пример числа x.

б) Может ли данное высказывание быть истинным, если $x \geqslant 7$? Если да, приведите пример.

150 Выпишите все целые значения n, при которых истинно высказывание:

а) «Число n не меньше 7, но меньше 10»;

б) «Число n положительно, но не больше, чем 3,9».

151 Выпишите все целые значения m, при которых ложно высказывание:

а) «Число m меньше, чем 8, или больше, чем 11»;

б) «Модуль числа m не меньше, чем 2».

152 Приведите пример, показывающий, что следующее высказывание ложно:

а) «В любом равнобедренном треугольнике любая высота является биссектрисой треугольника»;

б) «Два угла, сумма которых равна 180°, являются смежными».

153 Приведите контрпример (пример, показывающий, что высказывание не является истинным) к высказыванию:

а) «Если медиана треугольника не является его высотой, то такой треугольник не является равнобедренным»;

б) «Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны».

154 В пенале 5 синих карандашей и 4 жёлтых. Какие из следующих высказываний истинны:

а) «Среди любых 5 карандашей из пенала обязательно будет синий»;

б) «Любые 3 карандаша из этого пенала одного цвета»;

в) «Среди любых 6 карандашей из пенала обязательно будет 2 жёлтых»?

155 В пенале 6 синих карандашей и 3 жёлтых. Какие из следующих высказываний истинны:

а) «Среди любых четырёх карандашей из пенала обязательно будет синий»;

б) «7 карандашей, выбранных из пенала, могут оказаться одного цвета»;

в) «Любые 3 карандаша из пенала одного цвета»;

г) «Среди любых восьми карандашей из пенала обязательно 2 жёлтых»?

156 Известно, что натуральное число x делится на 12. Какие из утверждений являются истинными высказываниями:

а) «x делится на 6»;

б) «Последняя цифра числа x чётная»;

в) «144 делится на x»;

г) «x делится на 9»?

157 Площадь прямоугольника равна 36. Известно, что длины его сторон — натуральные числа. Про какие из следующих утверждений можно сказать, что они являются истинными высказываниями?

а) «Длина хотя бы одной из сторон — чётное число».

б) «Этот прямоугольник является квадратом».

в) «Периметр этого прямоугольника больше, чем 72».

г) «Периметр этого прямоугольника меньше, чем 75».

23 Отрицание

Одно из умений, которыми нужно овладеть, — это умение строить отрицание к утверждению. Для простоты мы можем обозначать утверждения буквами.

Отрицание утверждения A — это такое утверждение B, что если A истинно, то B ложно, и наоборот, если A ложно, то B истинно.

Про отрицание утверждения A можно кратко сказать **«не** A**»** или **«неверно, что** A**»**. Из двух утверждений A и **«не** A**»** одно и только одно может быть истинно. Если утверждение A истинно, то утверждение **«не** A**»** ложно, и наоборот.

Если в результате рассуждений получается, что одновременно верны и какое-то утверждение, и его отрицание, то в рассуждениях имеется логическая ошибка или сделано ошибочное предположение.

ПРИМЕР 1. Будет ли утверждение «Это яблоко красное» отрицанием к утверждению «Это яблоко зелёное»? Нет, ведь яблоко может быть жёлтым или полосатым, и тогда оба утверждения будут ложны. Правильное отрицание к утверждению «Это яблоко зелёное» — утверждение «Это яблоко **не** зелёное» или «**Неверно**, что это яблоко зелёное».

Очень интересно строятся отрицания к утверждениям со вспомогательными словами. Слово **«любой»** нужно заменить словом **«существует»**, и наоборот[1].

ПРИМЕР 2. Утверждение «У любого треугольника сумма внутренних углов равна 180°» является истинным высказыванием. Отрицанием будет высказывание «Существует треугольник, у которого сумма внутренних углов не равна 180°». Как мы понимаем, это утверждение ложно, поскольку такого треугольника не существует.

ПРИМЕР 3. Построим отрицание к утверждению:

«Для **любого** натурального числа $n \geqslant 2$ **существует** простое число, которое заключено между числами n и $2n$».

Сначала это утверждение было сформулировано в виде предположения (гипотезы), но в 1852 г. П. Л. Чебышёв[2] доказал его, и теперь мы знаем, что это истинное высказывание. Отрицание будет звучать следующим образом:

«**Существует** натуральное число $n \geqslant 2$ такое, что **любое** число, заключённое между числами n и $2n$, **не** является простым».

Это утверждение является ложным высказыванием.

При построении отрицания к утверждению вспомогательное слово «**любой**» нужно заменить словом «**существует**» и, наоборот, слово «**существует**» нужно заменить словом «**любой**».

[1] Разумеется, при этом нужно согласовать слова по правилам грамматики, используя подходящий падеж, род и число. Может быть, придётся добавить предлог. Например, «для любого», «существуют» и т. д.

[2] Пафнутий Львович Чебышёв — великий русский математик XIX в.

Вопросы

1 Для некоторого утверждения A высказывание «**не** A» ложно. Истинно или ложно A?

2 Для некоторого утверждения A высказывание «**неверно**, что **не** A» ложно. Истинно или ложно A?

3 Постройте отрицание к высказыванию «Сейчас на улице солнечно».

Задачи

158 Постройте отрицание утверждения:

а) «Число 5 делится на 2»;

б) «Прямые a и b имеют общую точку»;

в) «Юпитер — планета Солнечной системы».

159 Дано уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$. Истинны или ложны высказывания:

а) «Любое значение x удовлетворяет данному уравнению»;

б) «Ни одно значение x не удовлетворяет данному уравнению»;

в) «Существует число, которое является решением данного уравнения»;

г) «Некоторые числа являются решениями данного уравнения»?

Постройте отрицания для ложных утверждений.

160 Рассмотрим утверждение «Число 72 делится на число x». Истинны или ложны высказывания:

а) «Это утверждение истинно для всех натуральных x»;

б) «Это утверждение не является истинным ни при одном натуральном x»;

в) «Это утверждение истинно для всех натуральных x, которые меньше 5»;

г) «Это утверждение ложно при некоторых натуральных x»;

д) «Это утверждение истинно для некоторых трёхзначных чисел x»?

Постройте отрицания к ложным высказываниям.

161 Определите, истинны или ложны следующие высказывания, и постройте отрицания:

а) «Любое число является решением неравенства $x > 0$»;

б) «Все положительные числа являются решениями неравенства $x > 0$»;

в) «Существует положительное решение неравенства $x > 0$».

162 Сформулируйте отрицание для утверждения:

а) «При бросании игрального кубика выпало менее 3 очков»;

б) «При бросании игрального кубика выпало простое число очков».

163 Игральную кость бросили 2 раза. Сформулируйте отрицание для следующих утверждений:

а) «Четыре очка не выпало ни разу»;

б) «Оба раза выпало 5 очков».

164 Симметричную монету бросили трижды. Сформулируйте отрицание для следующих утверждений:

а) «Орёл не выпал ни разу»;

б) «Все три раза выпал орёл».

24 Условные утверждения

ПРИМЕР 1. Согласно СНиП[1] в зданиях, где больше пяти этажей, должен быть лифт. Это правило можно сформулировать в виде утверждения: «**Если** в здании больше, чем 5 этажей, **то** в этом здании должен быть лифт».

Это сложное утверждение, составленное из двух с помощью слов **если** и **то**. Первое утверждение «В здании больше, чем 5 этажей», второе — «В этом здании должен быть лифт».

Утверждения, составленные с помощью логической конструкции **если ..., то ...**, называют **условными утверждениями**.
Первое утверждение называется условием или **посылкой**, а второе — **следствием**.

ПРИМЕР 2. Из курса геометрии вы знаете аксиому[2] параллельных: «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной». Эту аксиому принимают за истинное высказывание, и можно её сформулировать в виде условного утверждения:

«**Если** точка не лежит на данной прямой, **то** через эту точку можно провести единственную прямую, параллельную данной».

Посылкой является утверждение «Точка не лежит на данной прямой», а следствием — утверждение «Через эту точку можно провести единственную прямую, параллельную данной».

Многие математические утверждения — условные. Если такое утверждение удаётся доказать, то получается истинное высказывание. Наиболее важные и общие истинные условные высказывания называются теоремами.

Слова **«если»** и **«то»** можно заменить стрелкой. Например, условное утверждение «Из утверждения A следует утверждение B», то есть «**Если** A, **то** B», можно кратко записать с помощью стрелки: $A \to B$.

Утверждение $A \to B$ ложно, только если посылка A истинна, а следствие B ложно. Во всех остальных случаях утверждение $A \to B$ истинно. Можно сформулировать правило.

Правило. Условное утверждение истинно, если следствие истинно или если посылка ложна.

Иными словами, условное утверждение $A \to B$ будет ложным, только при попытке получить ложь из истины. Во всех прочих случаях утверждение $A \to B$ истинно.

Истинно даже утверждение вида **«ложь → истина»**. Это может показаться странным, но это так: из ложного утверждения можно вывести любое следствие — и истинное, и ложное. Иногда коротко говорят: «Из лжи следует что угодно». Точно так же: «Истина следует откуда угодно».

[1] СНиП — строительные нормы и правила.
[2] Аксиома — высказывание, которое принимается как истинное. Аксиомы — это фундамент математических рассуждений, начальные истинные высказывания.

$2 \cdot 2 = 5$

↓

$7 = 2 \cdot 2 + 2 = 2(2 + 1)$

↓

7 делится на 2

↓

число 7 составное

Рисунок 42. **Так можно «доказать», что если $2 \cdot 2 = 5$, то число 7 составное**

Чтобы понять, истинно или ложно условное утверждение, надо узнать, истинны или ложны его составные части — посылка и следствие.

ПРИМЕР 3. Является истинным или ложным утверждение:

а) «**Если** $2 \cdot 2 = 4$, **то** число 7 — составное»;

б) «**Если** $2 \cdot 2 = 5$, **то** число 7 — составное»;

в) «**Если** $2 \cdot 2 = 4$, **то** число 7 — простое»?

Эти утверждения могут показаться странными, но это не мешает определить их истинность.

Утверждение а) ложно, так как в нём из истины следует ложь.

Утверждение б) бессмысленно, но истинно, поскольку в нём ложная посылка, и из неё можно вывести любое утверждение и даже заведомую чепуху (рис. 42).

Утверждение в) истинно, хотя бы потому, что число 7 действительно простое. Посылка здесь тоже истинна, это приятно, но уже не играет роли. Достаточно того, что следствие — истинное высказывание.

Вопросы

1 Рассмотрите утверждение «Если на двух игральных костях в сумме выпало 3 очка, то на одной из них выпало одно очко». Что здесь посылка? Что следствие? Является ли это утверждение истинным высказыванием?

2 Утверждение $A \to B$ ложно, а утверждение A — истинно. Истинно или ложно утверждение B?

Задачи

165 Является истинным или ложным высказывание:

а) «**Если** $3 < 5$, **то** сумма внутренних углов треугольника равна $190°$»;

б) «**Если** $5 < 3$, **то** сумма внутренних углов треугольника равна $190°$»;

в) «**Если** $3 < 5$, **то** в равнобедренном треугольнике два угла равны»;

г) «**Если** $5 < 3$, **то** в равнобедренном треугольнике два угла равны»?

166 К утверждению «**Если** ..., **то** на этих двух игральных кубиках в сумме выпало больше 11 очков» подберите посылку, чтобы утверждение стало истинным высказыванием.

167 К утверждению «**Если** ..., **то** на этих двух игральных кубиках в сумме выпало 7 очков» подберите такую посылку, чтобы оно было ложным.

168 К утверждению «**Если** ..., **то** на этих двух игральных кубиках в сумме выпало 13 очков» подберите такую посылку, чтобы оно было истинным.

169 В жилых домах, в которых больше 5 этажей, должен быть установлен лифт. Считая, что это условие соблюдается, укажите, какие из утверждений являются истинными высказываниями:

а) «Если в доме нет лифта, то в этом доме больше 5 этажей»;

б) «Если в доме больше 6 этажей, то в нём есть лифт»;

в) «Если в доме лифта нет, то в этом доме меньше 5 этажей»;

г) «Если в доме нет лифта, то он не выше 6 этажей»;

д) «Если в доме 4 этажа, то в нём лифта нет»;

е) «Если в доме не больше 5 этажей, то в нём нет лифта»;

ж) «Если в доме есть лифт, то в этом доме есть пятый этаж».

170 Выходя на улицу, Анна Дмитриевна обязательно надевает перчатки. Какие из следующих высказываний истинны:

а) «Если Анна Дмитриевна без перчаток, значит, она дома»;

б) «Если Анна Дмитриевна без перчаток, значит, она не на улице»;

в) «Если Анна Дмитриевна в перчатках, значит, она на улице»;

г) «Если Анна Дмитриевна на улице, значит, она в перчатках»;

д) «Если Анна Дмитриевна дома, значит, она без перчаток»?

171 Даны три высказывания:

A «Число x делится на 3»,

B «Число x делится на 6»,

C «Число x чётно».

Какие из следующих высказываний истинны при любом значении x:

а) $A \to B$; б) $B \to A$; в) $B \to C$?

25 Обратные и равносильные утверждения. Признаки и свойства. Необходимые и достаточные условия

Обратные и равносильные утверждения

ПРИМЕР 1. Вспомним признак делимости на 3: «**Если** сумма цифр натурального числа делится на 3, **то** и само число делится на 3». Это истинное высказывание.

Построим **обратное** утверждение: «**Если** натуральное число делится на 3, **то** сумма его цифр также делится на 3». Это утверждение выражает свойство чисел, делящихся на 3. И оно тоже истинно.

Если исходное утверждение записать в виде $A \to B$, то обратное ему утверждение имеет вид $B \to A$. Такие утверждения называют **взаимно обратными**.

В этом примере оба взаимно обратных утверждения оказались истинными. Так бывает не всегда.

ПРИМЕР 2. Утверждение «**Если** натуральное число делится на 9, **то** оно делится на 3» является истинным высказыванием. Однако обратное утверждение «**Если** натуральное число делится на 3, **то** оно делится на 9» – ложно (приведите контрпример, показывающий, что это утверждение ложно).

! Если утверждение $A \to B$ истинно, то обратное утверждение $B \to A$ не обязательно истинно.

Если всё же два взаимно обратных утверждения истинны или ложны одновременно, то они **равносильны**. Примеры равносильных утверждений вам встречались в геометрии.

ПРИМЕР 3. Два утверждения:

«**Если** треугольник равнобедренный, **то** два угла этого треугольника равны»

и

«**Если** в треугольнике два угла равны, **то** такой треугольник равнобедренный» —

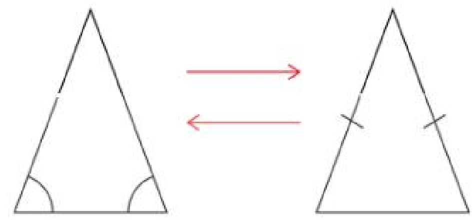


Рисунок 43

два взаимно обратных равносильных утверждения (рис. 43). Первое выражает свойство, а второе — признак равнобедренного треугольника.

Равносильными могут быть не только взаимно обратные утверждения. Нужно лишь, чтобы они были истинными или ложными одновременно.

Равносильные утверждения — это утверждения, которые являются одновременно истинными или одновременно ложными.

Необходимые и достаточные условия, признаки и свойства

Посмотрим на условное утверждение «**Если** A, **то** B». Оно говорит, что если посылка A истинна, то этого достаточно, чтобы следствие B также оказалось истинным.

Поэтому утверждение A часто называют **достаточным условием** для B.

Значит, если B ложно, то A не может быть истинным. Можно сказать, что «без B не будет A».

Поэтому B называют **необходимым условием** для A.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим знакомое нам утверждение:

«**Если** накрест лежащие углы при двух данных прямых и секущей равны, **то** данные прямые параллельны».

Здесь первая часть «накрест лежащие углы равны» является достаточным условием для второй части «прямые параллельны».

Напротив, вторая часть «прямые параллельны» является необходимым условием того, чтобы накрест лежащие углы оказались равны: если не будет параллельности, то и равенства накрест лежащих углов не будет.

Очень часто математические теоремы формулируют как **признаки** или **свойства**. Утверждение в этом примере — признак параллельности прямых, известный вам из геометрии.

ПРИМЕР 5. Сформулируем утверждение: «**Если** идёт дождь, **то** асфальт на улице мокрый». Это утверждение можно рассматривать по-разному.

1. Как признак мокрого асфальта. 2. Как свойство идущего дождя.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Мокрый асфальт — не признак дождя. Асфальт могла намочить поливальная машина, а вовсе не дождь.

ПРИМЕР 6. «**Если** человек прошёл пешком 20 км, **то** он сильно устал». Это свойство долгой ходьбы и одновременно признак усталости.

И здесь тоже обратное утверждение «**Если** человек сильно устал, **то** значит, он прошёл пешком 20 км» не является истинным. Этот человек мог устать совсем по другой причине.

Любой признак при желании можно рассмотреть как свойство или наоборот. Легко запутаться. Поэтому некоторые утверждения мы по традиции привыкли называть только признаками, а другие — свойствами.

ПРИМЕР 7. Сформулируем утверждение: «**Если** три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, **то** эти треугольники равны». Это признак равенства треугольников.

ПРИМЕР 8. Ещё утверждение: «**Если** пропорция $a : b = c : d$ верна, **то** $ad = cb$». Это основное свойство пропорции.

Рассуждения и умозаключения часто встречаются в жизни. Обычно мы не стараемся формулировать утверждения точно и не следим, где признак, а где свойство, какие наши мысли и слова являются достаточными условиями, а какие необходимыми. Мы это делаем интуитивно. Иногда ошибаемся, а иногда шутим, намеренно нарушая правила логики.

Занимаясь математикой, важно следить за тем, чтобы рассуждения были безупречны. Приходится тщательно формулировать истинные высказывания в виде аксиом и теорем, признаков и свойств. При этом нужно понимать, как правильно сформулировать признак, как устроено свойство, где достаточные и где необходимые условия.

Вопросы

1 Как называются два утверждения, которые одновременно истинны или одновременно ложны?

2 Приведите пример истинного высказывания, обратное к которому не является истинным.

3 Приведите пример теоремы-признака, известной вам из геометрии.

Задачи

172 Постройте утверждение, обратное данному:

а) «Если предмет сделан из дерева, то он не тонет в воде».

б) «Если число оканчивается двумя нулями, то оно делится на 100».

в) «Если у человека отчество Дмитриевич, то его отца зовут Дмитрий».

г) «Если животное — кошка, то у него четыре лапы».

173 Рассмотрим утверждения:

A: «Натуральное число N делится на 3»,

B: «Натуральное число N делится на 9»,

C: «Сумма цифр натурального числа N делится на 3»,

D: «Сумма цифр натурального числа N делится на 9».

Запишите символически с помощью букв и стрелок следующее утверждение и обратное к нему:

а) «**Если** сумма цифр натурального числа N делится на 9, **то** это число делится на 3».

б) «**Если** натуральное число N делится на 9, **то** сумма цифр этого числа делится на 3».

Какие из этих утверждений являются истинными высказываниями?

174 Пусть N — натуральное число. Даны утверждения:

A: «N делится на 3»,

B: «N делится на 9»,

C: «Сумма цифр числа N делится на 3»,

D: «Сумма цифр числа N делится на 9»,

E: «Число N является натуральной степенью числа 2».

Составьте из этих утверждений два взаимно обратных условных утверждения:

а) так, чтобы оба были истинными высказываниями;

б) так, чтобы одно из них было истинным, а обратное могло оказаться ложным;

в) так, чтобы оба утверждения оказались ложными высказываниями.

175 Предположим, что N — некоторое натуральное число. Найдите равносильные утверждения.

A: «Число N чётное».

B: «Число N равно $2k$ для некоторого натурального числа k».

C: «Число N даёт остаток 2 при делении на 4».

D: «Число N заканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8».

E: «Число N делится на 2, но не делится на 4».

26* Противоположные утверждения. Доказательство от противного

Взаимно противоположные утверждения

У некоторых людей логика немного хромает: они иногда путаются в посылках и следствиях. Рассмотрим два примера — бытовой и математический.

ПРИМЕР 1. Вспомним правило из примера про лифты (п. 24 с. 99). Предположим, что в городе построены два новых здания. В одном 12 этажей, а в другом 3 этажа. В обоих установлены лифты. Нарушено ли правило?

Правило не нарушено. Ведь не сказано, что в зданиях, где не больше 5 этажей, не должно быть лифтов.

Чтобы разобраться, воспользуемся схемой со стрелками. Пусть утверждение A «В здании больше, чем 5 этажей», а утверждение B «В этом здании должен быть лифт». Тогда правило можно записать схематически $A \to B$.

Утверждение

«**Если** в здании не больше, чем 5 этажей,
то в этом здании не должно быть лифтов»

имеет схему **не** $A \to$ **не** B. И если первое утверждение является истинным высказыванием, то про второе этого сказать нельзя. Не запрещено устанавливать лифты в малоэтажных зданиях.

Утверждения $A \to B$ и **не** $A \to$ **не** B называют **противоположными** друг другу.

Рассмотрим другой пример.

ПРИМЕР 2. Мы знаем, что если натуральное число оканчивается цифрой 2, то это число чётное. Сформулируем это в виде условного утверждения:

«**Если** натуральное число оканчивается цифрой 2,
то это число чётное».

Будет ли истинным утверждение, которое получится, если обе части заменить их отрицаниями:

«**Если** натуральное число не оканчивается цифрой 2,
то это число нечётное».

Чтобы это опровергнуть, достаточно примера. Число 4 не оканчивается цифрой 2, но оно всё равно чётное. Посылка «Число не оканчивается цифрой 2» истинна, а следствие «Число нечётное» ложно. Налицо попытка вывести из истины ложь. Утверждение ложно.

! Если из утверждения A следует утверждение B, то это не означает, что из утверждения **не** A следует утверждение **не** B.

Доказательство от противного

Предположим, что мы знаем, что утверждение A истинно, и, кроме этого, пусть истинно высказывание $A \to B$.

Предположим, что утверждение B ложно. Тогда A тоже обязано быть ложным. Но ведь мы знаем, что A истинно!

Получается противоречие: утверждение A оказывается одновременно истинным и ложным высказыванием. Следовательно, где-то в наших рассуждениях ошибка. Единственное место, где она может быть, — это предположение, будто утверждение B ложно. Сформулируем полученную мысль с помощью схем со стрелками.

! Утверждения $A \to B$ и **не** $B \to$ **не** A равносильны, то есть одновременно оба истинны или оба ложны. Поэтому вместо одного можно доказывать другое.

На таком рассуждении построено **доказательство от противного**. Иногда трудно доказать некоторое утверждение. Но если предположить, что оно ложно, и прийти к противоречию, то придётся признать, что всё же утверждение истинно.

С доказательствами от противного вы встречались в геометрии. Обычно такое доказательство начинается словами «предположим противное». Пусть нужно доказать некоторое утверждение B. Доказательство состоит из трёх шагов.

1. Сначала делают предположение, что истинно утверждение **не** B.
2. Затем приходят к противоречию с каким-нибудь истинным высказыванием.
3. Делают вывод о том, что сделанное предположение ложно, а значит, утверждение B истинно.

ПРИМЕР 3. Используя метод доказательства от противного, докажем утверждение

«В **любом** треугольнике не более одного прямого угла».

Доказательство.

1. Предположим противное, то есть будем считать, что истинно отрицание: «**Существует** треугольник KLM, в котором два прямых угла L и M».

2. Обе прямые KL и KM перпендикулярны прямой LM. Значит, через точку K проведены две различные прямые, перпендикулярные одной и той же прямой LM (рис. 44). Это противоречит теореме о том, что через любую точку к данной прямой можно провести только один перпендикуляр.

3. Следовательно, сделанное предположение неверно, а потому утверждение

«В **любом** треугольнике не более одного прямого угла» —

истинно. Конец доказательства.

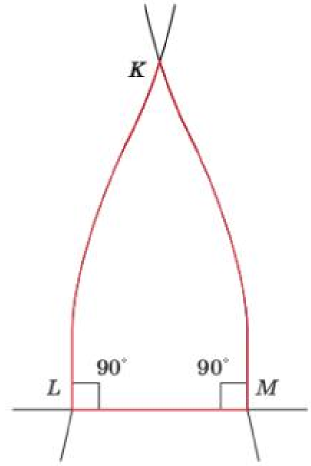


Рисунок 44

ПРИМЕР 4. В классе 26 учеников. Докажите, что среди них найдутся трое, у которых день рождения в одном и том же месяце.

Доказательство. Предположим, что троих с днём рождения в одном месяце нет. Тогда в каждом из 12 месяцев день рождения случается не более чем у двоих. Но тогда в классе не больше, чем $12 \cdot 2 = 24$ человека. А это противоречит истинному высказыванию «В классе 26 человек».

Противоречие показывает, что предположение неверно. Значит, найдутся трое, у кого день рождения в одном месяце.

Вопросы

1 Приведите пример двух противоположных утверждений.

2 Верно ли, что если исходное утверждение истинно, то противоположное ему ложно?

3 Верно ли, что если исходное утверждение истинно, то противоположное ему тоже истинно?

Задачи

176 В магазине продаются булочки с яблочным джемом и с абрикосовым вареньем. Все булочки с яблочным джемом посыпаны корицей. Паша купил булочку без корицы. Докажите, что в ней абрикосовое варенье.

177 В ящике лежат 20 синих и 20 зелёных носков. Докажите, что если наугад вынуть из ящика три носка, хотя бы два из них окажутся одного цвета.

178 Антип Петрович разорвал газетный лист пополам. Потом взял один из кусков и разорвал его пополам. Опять взял один из кусков и разорвал пополам. Антип Петрович может рвать газету таким образом сколь угодно много раз. Сможет ли он получить в результате 100 кусков?

179 Пётр Антипович разорвал газетный лист на три части. Потом взял один из кусков и разорвал его на три части. Опять взял один из кусков и разорвал на три части. Пётр Антипович может рвать газету таким образом сколь угодно много раз. Докажите, что Пётр Антипович не сможет получить в результате 100 кусков.

180 Докажите, что существует только одно простое чётное число.

181 Сколько существует простых чисел, которые делятся: а) на 5; б) на 100?

182 Матвей зашифровал пример на сложение с помощью числового ребуса. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры: АВ + БГ = ВЖГ. Докажите, что Матвей в чём-то ошибся.

VI Случайные опыты и случайные события

Попытка изучать изменчивость и случайность с помощью математики привела к появлению теории вероятностей. В этой главе мы познакомимся с основными понятиями теории вероятностей: случайными опытами и случайными событиями, которые происходят в этих опытах.
Вероятность случайного события — это числовая мера его правдоподобия. Чем больше шансов на осуществление события, тем больше его вероятность.
В нашей жизни играют большую роль маловероятные события. Мы расскажем о таких событиях и о том, как правильно к ним относиться.

27 **Примеры случайных опытов и случайных событий**

28 **Вероятности и частоты событий**

29 **Монета и игральная кость в теории вероятностей**

30 **Как узнать вероятность события**

31 **Вероятностная защита информации от ошибок**

27 Примеры случайных опытов и случайных событий

О некоторых событиях мы можем твёрдо сказать, что они произойдут. В наступлении других событий мы не уверены. Например, в самый жаркий и солнечный летний день мы точно знаем, что лето кончится, наступит осень, а затем зима. Но невозможно сказать заранее, будет эта зима тёплой или холодной. Мы не можем предвидеть, будет ли следующий год влажным или засушливым, урожайным или нет. В неурожайный год дорожает хлеб, предприятия сельского хозяйства несут убытки, а некоторые из них могут разориться. Урожайные годы тоже хорошо было бы прогнозировать заранее.

Нельзя предвидеть многие события даже недалёкого будущего.

ПРИМЕР 1. Сейчас прогнозы стали намного точнее, чем они были 10—15 лет назад. Но всё равно, даже имея грозовой прогноз, нельзя быть уверенным в том, что гроза случится именно в нашем районе в предсказанное время. Можно лишь говорить о шансах этого события. Поэтому в прогнозах погоды можно встретить выражения «дождь маловероятен», «вероятность грозы 10%», «к вечеру возможно усиление ветра» и т. п.

ПРИМЕР 2. Для России и других нефтедобывающих стран важны мировые цены на нефть. Безошибочно прогнозировать эти цены не удаётся, хотя многие стараются это сделать. При составлении бюджета государства на следующий год важно знать, превысит цена на нефть некоторый уровень (**цена отсечения**) или нет. Если превысит, то в бюджете можно предусмотреть определённые накопления. Бюджет России на 2021 г. был составлен исходя из цены отсечения 42,4 долл. за баррель.

ПРИМЕР 3. Перед началом футбольного чемпионата мы не можем назвать ни победителя, ни итоговый счёт. Мы можем обсуждать шансы команд, но лишь по окончании чемпионата станет ясно, кто какое место занял.

Все упомянутые выше примеры — **случайные события**. Всякое случайное событие связано с некоторыми условиями. Если мы создаём или описываем такие условия, мы тем самым производим некоторый **случайный опыт (случайный эксперимент)**. Если случайный опыт не описан или описан плохо, то трудно говорить о вероятностях случайных событий. Например, о шансах спортивных команд на победу можно говорить, только если эти команды могут встретиться и сыграть. О вероятности выпадения шести очков на игральном кубике можно говорить, только если кубик бросают.

Случайный опыт (случайный эксперимент) — это условия и обстоятельства, в которых мы рассматриваем случайные события.

ПРИМЕР 4. Случайный эксперимент — телефонный разговор. Можно, например, рассмотреть событие «длительность разговора составит от 5 до 10 минут» или событие «разговор прервётся из-за плохой связи».

ПРИМЕР 5. Школьник пишет контрольную работу по математике. Это в нашем понимании случайный эксперимент, и в нём возникают случайные события. Например, «школьник сделает не больше трёх ошибок» или «школьник получит отметку «отлично».

ПРИМЕР 6. У игрального кубика шесть одинаковых граней с числами от 1 до 6. Невозможно предсказать, какая грань выпадет, если кубик случайным образом бросить на стол. Выпадение шестёрки — случайное событие. Другое случайное событие — «выпадет больше двух очков».

ПРИМЕР 7. Подсчёт автомобильных аварий (ДТП[1]), которые произойдут завтра в определённом городе или на определённой дороге, — случайный опыт, поскольку условия определены, а результат неизвестен. Примеры случайных событий в этом опыте — «ДТП не будет» или «случится больше шести ДТП» и т. п.

ПРИМЕР 8. При проведении денежной лотереи возникают события: «выпадение выигрыша на определённый номер» или «сумма выигрыша на данный билет лотереи превысит 1000 р.».

Примеры случайных экспериментов и связанных с ними случайных событий можно приводить бесконечно.

Если случайное событие не относится к рассматриваемому эксперименту, то оно не является событием этого эксперимента. Например, в опыте, где школьник пишет контрольную работу по математике, событие «в этот день отменён урок физкультуры» не является случайным событием.

Поскольку теория вероятностей изучает случайные события в случайных экспериментах, слово «случайное» мы часто будем опускать.

Вопросы

1. Вообразите, что вы ловите рыбу на озере, где водится только окунь и плотва. Какие случайные события могут произойти в этом случайном опыте?
2. Случайный эксперимент — определение времени работы некоторого мобильного телефона от батареи. Какие случайные события возможны в этом эксперименте?
3. Игральный кубик бросают один раз. Приведите примеры двух-трёх случайных событий в этом эксперименте.
4. Автомобиль подъезжает к перекрёстку двух дорог и намерен продолжить движение. Какие случайные события возможны в этом случайном опыте? Приведите несколько примеров.

28 Вероятности и частоты событий

Часто мы не можем сказать заранее, произойдёт в некотором случайном опыте определённое событие или нет. Но мы можем говорить о шансах этого события.

Например, обсуждая будущую встречу футбольных команд А и Б, кто-то скажет, что их шансы на победу относятся как 1 к 3. Этот человек считает победу команды Б втрое более вероятной, чем победу команды А. В подтверждение своего мнения он скажет, что команды А и Б встречались много раз и при этом команда Б побеждала примерно в три раза чаще, чем команда А. Поэтому он и говорит, что вероятность события «победит команда А» равна 0,25, а вероятность события «победит команда Б» равна 0,75.

[1] ДТП — дорожно-транспортное происшествие.

При бросании игрального кубика шансы выпадения единицы такие же, как шансы выпадения двойки. А шансы событий «выпадет шестёрка» и «шестёрка не выпадет» относятся как 1 к 5.

Шансы случайных событий измеряют числами от 0 до 1 и называют **вероятностями.** Если мы бросаем на стол симметричную монету, то шансы событий «орёл» и «решка» разумно считать одинаковыми, поскольку монета симметрична.

Вероятность случайного события — это числовая мера правдоподобия этого события.
Невозможное случайное событие — это случайное событие, которое в случайном эксперименте не наступает. Вероятность невозможного события равна 0.
Достоверное случайное событие — это случайное событие, которое в случайном эксперименте обязательно наступает. Вероятность достоверного события равна 1.

Некоторые случайные события не являются достоверными, но происходят практически наверняка. Таким, например, является событие «31 января следующего года в Новосибирске будет лежать снег». Можно смело рассчитывать на это.

Другие события происходят очень редко. Маловероятно, например, что 31 января следующего года в Новосибирске снега не будет вовсе.

Иногда вероятности событий можно рассчитать математически, но часто приходится их оценивать, то есть приближённо находить с помощью частот, повторяя один и тот же случайный опыт много раз.

Пусть, например, мы провели один и тот же опыт 100 раз, и некоторое событие C произошло 45 раз. Отношение числа тех опытов, в которых событие C произошло, к общему числу проведённых опытов равно $\frac{45}{100} = 0{,}45$.

Число 0,45 в этом случае является **частотой случайного события** C. Мы уже говорили о частотах значений в числовых наборах, поэтому частота события не является для нас совсем новым понятием.

Отношение числа опытов, в которых случайное событие произошло, к общему числу проведённых одинаковых опытов называется **частотой случайного события** в этой серии опытов.

Если событие не наступило ни разу, то его частота равна 0. Но это не значит, что оно невозможное. Может быть, в следующей серии таких же опытов это событие всё же случится. Если событие наступило во всех опытах, то частота этого события равна 1.

Вероятности и частоты связаны. Если опыт повторять достаточно много раз, то почти наверняка окажется, что *частота события близка к его вероятности*. Значит, если мы знаем вероятность события, то можем сказать, насколько часто это событие будет происходить в жизни.

Например, если какое-то событие имеет вероятность 0,99, то в среднем его следует ожидать в 99 случаях из 100, то есть почти всякий раз. Напротив, если событие имеет вероятность 0,01, то происходит оно редко, примерно в 1 случае из 100.

ПРИМЕР. Предположим, что при определённых погодных условиях в некоторой местности вероятность урагана равна 0,25, то есть при многократных повторениях упомянутых условий примерно в 25% случаев будет ураган. Вероятность 0,25 достаточно высока, чтобы объявить штормовое предупреждение. И неважно, что ураган может не случиться. В таком случае лучше перестраховаться.

Говоря, что событие произойдёт примерно в 25 случаях из 100, мы не утверждаем, что оно непременно случится 25 раз из 100 возможных. Оно может произойти 22, 23, 24, 25, 26, 27 или 28 раз. Оно даже может произойти всего 18 раз или 32 раза в какой-нибудь серии из 100 опытов. Но такие серии опытов будут встречаться довольно редко.

Если вероятность события равна 0,25, то не следует ожидать его появления, скажем, 1 или 99 раз из 100. Напротив, прогноз «от 22 до 28» раз можно считать весьма разумным. Как и в каких случаях устанавливаются разумные границы прогноза — сложный вопрос, ответ на который часто удаётся найти с помощью теории вероятностей.

Частота события близка к его вероятности.

Этот факт связывает теорию вероятностей с практикой. Он позволяет оценивать вероятности с помощью статистических опытов и прогнозировать частоты наступления событий, зная их вероятности. Так проявляется статистическая устойчивость в повторяющихся сериях случайных экспериментов.

Вопросы

1 Что такое частота случайного события? Как частоты и вероятности событий связаны друг с другом?

2 Какие значения может принимать вероятность случайного события?

3 Может ли частота случайного события быть больше единицы?

4 Какие события называют достоверными, а какие — невозможными?

5 Чему равна вероятность достоверного случайного события; невозможного случайного события?

6 Приведите примеры невозможных и достоверных случайных событий в эксперименте, где бросают игральную кость с очками от 1 до 6.

7 Приведите примеры маловероятных событий в эксперименте «прогноз погоды на завтра».

8 Приведите примеры нежелательных маловероятных событий в жизненных ситуациях. Обсудите с учителем и одноклассниками, какими из них и в каких случаях можно пренебречь.

Задачи

183 Бросают игральный кубик, на гранях которого числа от 1 до 6. Укажите, какие из перечисленных событий являются достоверными, а какие — невозможными:

а) «выпадет 7 очков»;

б) «выпадет больше 2, но меньше 5 очков»;

в) «выпадет от 1 до 6 очков»;

г) «выпадет больше 3, но меньше 4 очков».

184 Книгу, в которой 256 страниц, открывают на случайно выбранной странице. Укажите, какие события являются достоверными, а какие — невозможными:

а) «номер открытой страницы — дробное число»;

б) «номер открытой страницы равен 342»;

в) «номер открытой страницы в книге не меньше 1».

185 Какова, по вашему мнению, вероятность события:

а) «завтра на улице вам встретится живой динозавр»;

б) «число дней в следующем месяце не превысит 31»;

в) «на морозе вода в стакане через некоторое время замёрзнет»;

г) «сборная вашего класса выиграет в футбол у команды «Спартак»?

29 Монета и игральная кость в теории вероятностей

Многие важные факты теории вероятностей были получены в опытах с обычными монетами и игральными кубиками. Долгое время теория вероятностей развивалась как исчисление шансов в играх, но давно уже «вышла из детского возраста». Гораздо важнее и интереснее описывать случайные явления, возникающие в природе, в технике, в общественной жизни, чем вычислять шансы выигрышей или редких игровых комбинаций. Однако монета и игральный кубик не ушли из теории вероятностей. Они продолжают играть важную роль, подобно тому как важную роль играют линейка и циркуль в геометрии.

С помощью монеты, игральных кубиков и других простых игровых моделей можно изучать очень сложные и запутанные случайные явления.

Математическая монета, используемая в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. У математической монеты нет цвета, размера, веса и достоинства. Она не сделана ни из какого материала и не служит платёжным средством.

Бросание монеты — случайный опыт, который может окончиться либо орлом (О), либо решкой (Р). Всего два события, и одно из них обязательно произойдёт.

Если мы бросим монету 2 раза, то это другой случайный эксперимент, который может окончиться одним из четырёх вариантов (исходов) ОО, ОР, РО и РР: два исхода первого броска комбинируются с двумя возможными исходами второго. Получается всего $2 \cdot 2 = 4$ возможности.

Пробная монета-рубль 1771 г.

Аверс монеты образца 1992 г.

Если бросить монету 3 раза, то может быть $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ исходов, которые можно обозначить ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО и РРР.

Название «орёл» для лицевой стороны (аверса) монеты происходит оттого, что на ней изображён герб Российского государства — двуглавый орёл. Впервые орёл на монетах появился при великом князе Иване III.

Название «решка» для обратной стороны монеты (реверса) возникло потому, что в древности монету при чеканке клали на решётчатую наковальню, чтобы она не скользила при ударе. Решётка отпечатывалась на реверсе монеты. Сейчас на реверсе чеканят номинал монеты, но название «решка» сохранилось.

Настоящая монета не столь идеальна, как математическая; она может быть немного вогнутой, может иметь другие дефекты, которые влияют на результаты броска. Тем не менее, чтобы проверить на практике опыты с бросанием математической монеты, мы бросали и будем бросать обычную монету.

Монета часто помогала и до сих пор помогает людям в сложной ситуации сделать честный выбор без предпочтений, положившись только на случай. Например, в начале футбольного матча арбитр бросает монету, чтобы решить, какая из команд получит право начать игру.

Игральный кубик (шестигранная **игральная кость**) также служит прекрасным средством для получения случайных событий. Игральная кость имеет удивительную историю. Игры с костями были известны в глубокой древности в Индии, Китае, Лидии, Египте, Греции и Риме. Игральные кубики находили в Египте (XX в. до н. э.) и в Китае (VI в. до н. э.) при раскопках древних захоронений. Очки на гранях древнеегипетских костей часто изображались в виде птичьего глаза.


Игральный кубик

В Древней Руси игральные кубики (лодыжки, костыги, козули) часто изготавливали из костей животных. Отсюда и пошло название игрального кубика — «кость».

Упоминания о костях в древнеиндийской поэзии отражают популярность игры в кости в Древней Индии. «Гимн игрока» — первый литературный текст, упоминающий кости, — изображает их как враждебную человеку магическую стихию:

Ведь кости усеяны колючками и крючками,
Они порабощают, они мучают, испепеляют,
Одаряют, как ребёнок, победителя они вновь лишают победы.
Неудачливый игрок пытается заклясть кости, заключает с ними мир:
Заключите с нами дружбу! Помилуйте нас!

В Древней Греции считалось, что игральные кости придумал мифический герой Паламед во время Троянской войны. Но по версии философа Геродота, кости изобрели населявшие Малую Азию лидийцы, чтобы отвлечься от голода, болезней или других напастей.

В Древнем Риме в кости играли все сословия, от рабов до императоров. Император Клавдий даже написал книгу об игре в кости.

В Древнем Китае за игру в кости можно было попасть на каторгу.

Во Франции в XIII—XIV вв. многочисленные королевские указы запрещали игру в кости. Видимо, запреты эти оказались безрезультатными, поскольку королевским указом от 1396 г. запрещались уже не сами кости, а применение и изготовление поддельных костей[1].

Правильные (симметричные) кости обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь одинаковую площадь, быть плоскими и одинаково гладкими. Вершины и рёбра кубиков должны иметь правильную форму. Сумма очков на противоположных гранях правильной кости равна 7, чтобы затруднить жульничество при игре.

[1] Поддельная кость имеет нарушенную разметку, смещённый центр тяжести или изменённую форму для того, чтобы обеспечить преимущество тому игроку, кто знает об этом.

Математическая игральная кость, которая обсуждается и используется в теории вероятностей, — это математический образ правильной кости. Выпадения всех граней равновозможны.

Если игральный кубик бросают один раз, то возникает случайный опыт, в котором возможно 6 простейших равновозможных случайных событий: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

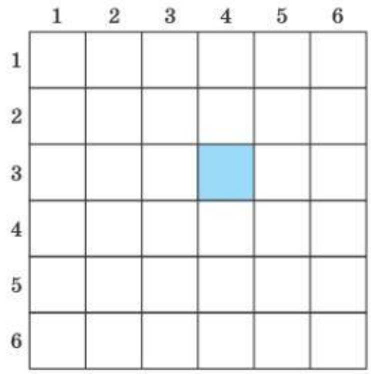


Рисунок 45

Если игральный кубик бросить дважды, то получится более сложный эксперимент, который может окончиться одним из $6 \cdot 6 = 36$ исходов. Их удобно изображать с помощью таблицы 6×6, где номер строки — результат первого броска, а номер столбца — результат второго (рис. 45). Если при первом броске выпало, скажем, 3 очка, а при втором 4 очка, то в таблице это можно изобразить, закрасив соответствующую клетку.

30 Как узнать вероятность события

> В некоторых случаях вероятность события можно установить, исходя из симметрии в случайном опыте.

Например, при бросании симметричной монеты разумно считать, что шансы орла и решки одинаковы, и поэтому вероятность выпадения каждой стороны равна $\frac{1}{2}$.

То же относится и к правильной игральной кости. Она имеет 6 граней. Кость симметрична, и поэтому вероятности выпадения всех граней мы полагаем одинаковыми и равными $\frac{1}{6}$.

> Иногда вероятности событий удаётся вычислить, зная вероятности более простых событий.

Но даже если вероятность события удалось рассчитать, остаются сомнения. Дело в том, что расчёты непременно основаны на каких-либо исходных предположениях. А предположения могут оказаться неточными или даже ошибочными.

> Ещё один метод определения вероятности — экспериментальный или статистический. Этот метод основан на наблюдениях.

При многократных повторениях опыта частоты случайных событий оказываются близки к их вероятностям. Поэтому если опыт можно повторять много раз, то вероятность случайного события можно оценить его частотой.

Рассмотрим связь частот и вероятностей на примере страхования. С 2004 г. в России действует закон об ОСАГО — обязательном страховании автогражданской ответственности. Владелец автомобиля должен заключить договор со страховой компанией. По этому договору владелец машины платит компании определённую сумму (**страховую премию** или **страховой взнос**), а компания взамен обязуется оплатить (до определённого предела) ущерб, который может быть нанесён этим автовладельцем другому автовладельцу, городской собственности или пешеходам в случае ДТП. Чтобы определить размер страхового взноса, нужно учесть две величины:

1) с какой вероятностью автомобиль в течение срока страхования может попасть в ДТП;

2) какой в среднем ущерб окружающим приносит одно ДТП.

Вероятность случайного события «в течение года автомобиль попадёт в ДТП» оценивается по статистическим данным, которыми располагают страховые компании. В разных регионах России эта вероятность разная — от 0,04 до 0,1.

> Вероятности некоторых событий не удаётся ни оценить, ни вычислить, ни назначить из соображений симметрии. Такими событиями теория вероятностей не занимается.

Что нам дают вероятности, кроме оценки шансов попасть в ДТП или выиграть в лотерее? Это далеко не единственная польза, которую может принести знание вероятностей.

С помощью теории вероятностей проводятся испытания лекарств, инженеры проектируют здания и сооружения, рассчитывают надёжность систем в автомобилях, самолётах, судах, на электростанциях и в космических кораблях. Вероятности опасных побочных явлений, отказов, аварий и катастроф нужно сделать как можно меньше. Чем менее вероятными являются неблагоприятные случайные события, тем лучше.

Роль маловероятных событий в жизни человека

Если вероятность события мала (например, 0,001), то оно наступает редко. Такие события называют **маловероятными**. Например, можно выиграть в лотерее большую сумму денег и жить безбедно, не учась и не работая. Но вероятность этого события настолько мала, что разумные люди на это не рассчитывают. Сформулирован даже принцип.

> **Принцип практической невозможности:** к маловероятным событиям при однократном проведении опыта относятся как к невозможным.

Это не теорема, а лишь принцип, определяющий наше отношение к маловероятным событиям в разных ситуациях. Важно уметь взвешивать риски. На принцип практической невозможности нельзя полагаться, если от этого зависит чья-то жизнь или здоровье. Например, вероятность попасть под машину, перебегая улицу, мала, но последствия этого события таковы, что пренебрегать ими нельзя. Поэтому не нужно перебегать улицу[1].

Нужно помнить, что даже очень маловероятные события иногда случаются. Например, организаторы зимней олимпиады в 2010 г. не могли допустить мысли, что зимой в Ванкувере (Канада) не будет снега. Но его почти не было. Пришлось пользоваться специальными снеговыми пушками. В результате такого маловероятного события никто не пострадал, только немного расстроились спортсмены и болельщики.

Но иногда случаются маловероятные события с тяжёлыми последствиями. И если такое событие произойдёт — обрушится здание, внезапно выйдут из строя тормоза в автомобиле, — потом будет поздно вспоминать, как мала была вероятность этого события. Поэтому, чтобы предотвратить несчастье, нужно регулярно проверять тормоза, вовремя ремонтировать или сносить ветхие здания и принимать другие необходимые меры. Таким образом можно значительно понизить и без того малую вероятность несчастья.

Есть меткая пословица: «Незаряженное ружьё раз в год стреляет». Это как раз о маловероятных событиях, которые всё же происходят.

! Добиться того, чтобы несчастья и катастрофы не случались совсем, невозможно. Но можно и нужно делать всё, чтобы вероятности этих событий стали как можно меньше.

К сожалению, часто люди из-за своего легкомыслия недооценивают опасность. Например, вероятность столкновения «Титаника» с айсбергом была крайне мала[2]. Капитан Эдвард Смит мог её ещё уменьшить, снизив скорость судна, но не сделал этого, считая, что столкновение невозможно.

Как следует относиться к маловероятным событиям, попробуем объяснить на примере с «упрямой» монетой.

Вообразим, что ваш приятель у вас на глазах бросает на стол монету 10 раз и все 10 раз выпадает орёл. Это может случиться, хотя это и маловероятно (такое случается в среднем реже одного раза на 1000 таких опытов). Теперь приятель предлагает вам угадать, что выпадет при следующем, одиннадцатом броске. Попросите его показать вам монету и стол поближе.

Предположим, что ваш приятель хитро улыбается и уклоняется под разными предлогами. Тогда следует заподозрить, что вам показывают фокус. Например, у монеты на обеих сторонах орёл. Или в столе скрыто хитрое магнитное устройство, а монета сильно намагничена. Или просто ловкость рук.

Другое дело, если приятель соглашается, и вы совершенно ясно видите, что перед вами обычный стол и обычная монета. В этом случае придётся признать, что вы стали свидетелем редкого, а потому удивительного события: 10 орлов из 10 попыток. Тогда шансы орла и решки при следующем броске одинаковы. Монете «не надоело» падать орлом вверх, и она «не испытывает неприязни к решке». Этот случай самый трудный для угадывания.

---

[1] Тот, кто бежит, имеет больше шансов споткнуться и упасть. Улицу нужно переходить спокойным шагом, убедившись в безопасности. И водителю проще предсказать действия и движения спокойно идущего пешехода, чем того, кто выбегает на проезжую часть.

[2] Британский трансатлантический пароход «Титаник», выполняя свой первый рейс, 15 апреля 1912 г. столкнулся с айсбергом и затонул.

31 Вероятностная защита информации от ошибок

Двойной ввод

Можно без преувеличения сказать, что мы живём в мире цифр. Цифры сопровождают нас повсюду и играют важную роль в нашей жизни. У любого человека множество документов, каждый из которых имеет номер. Нам часто приходится вводить массу данных на разных сайтах. Но человеку свойственно ошибаться. Как обезопасить себя от случайных ошибок?

Самый простой способ — двойной ввод. Многие сайты, включая сайты государственных услуг, запрашивают важную информацию дважды. Например, приходится два раза вводить новый пароль при создании личного кабинета, два раза подряд вводить адрес электронной почты. Зачем? Для защиты от ошибок.

Если пользователь придумает один пароль, а введёт по ошибке немного другой, то никто никогда не узнает, какой пароль по ошибке оказался в системе (рис. 46). Пользователь не сможет войти на сайт, он будет недоумевать и даже может начать возмущаться, считая, что сайт плохо работает.

Рисунок 46. **Двойной ввод пароля**

Чтобы подтвердить безошибочность ввода, программа регистрации просит ввести пароль ещё раз: вероятность двух одинаковых ошибок пренебрежимо мала[1].

То же и с электронной почтой: если при вводе — ошибка, то пользователь не получит информацию, которую ему добросовестно посылает система. Безошибочность ввода электронной почты очень важна. Поэтому используется двойной ввод.

Контрольные цифры и суммы

Другой способ вероятностной защиты информации — **контрольная сумма** или **контрольная цифра**.

Почти у каждого взрослого есть банковская карта. Чтобы сделать денежный перевод, нужно указать номер карты получателя. Кратко расскажем о том, как теория вероятностей помогает защититься от ошибки.

У большинства платёжных карт номер состоит из 16 цифр. Первая цифра номера — код платёжной системы[2]. По следующим пяти цифрам можно узнать, какой банк выпустил карту. Затем идёт девятизначный номер карты. Эти девять цифр можно считать случайными. И наконец — последняя, шестнадцатая цифра. Эта цифра контрольная. Чтобы определить контрольную цифру, применяется специальный алгоритм.

[1] Некоторых людей такие простые меры защиты раздражают. Они стараются схитрить — ввести пароль один раз и скопировать его во второе окно. На многих сайтах попытка копирования паролей блокируется. Но не на всех. Если в первое окно пароль введён с ошибкой, то ошибка скопируется во второе окно. Человек сам себя накажет.

[2] Номер банковской карты «Мир» начинается цифрой 2, у карт JCB первая цифра номера 3, у карт VISA — 4, у MasterCard — 5, у Maestro — 6.

1. Все цифры, стоящие на нечётных местах, умножаются на 2, при этом из двузначных произведений вычитается 9.

2. Полученные в результате первого шага цифры и цифры, стоящие на чётных местах, складываются.

3. Контрольная цифра — это цифра, которой в полученной сумме не хватает до ближайшего сверху числа, кратного 10.

ПРИМЕР. Предположим, банк выпустил карту, и первые 15 цифр такие:

2200 2476 0343 593_

Нужно определить последнюю контрольную цифру. Умножаем на 2 цифры, стоящие на нечётных местах, и при необходимости вычитаем 9. Получаются цифры 4, 0, 4, 5, 0, 8, 1, 6. Теперь найдём сумму полученных цифр и цифр, стоящих на чётных местах:

$$(4 + 0 + 4 + 5 + 0 + 8 + 1 + 6) + (2 + 0 + 4 + 6 + 3 + 3 + 9) = 28 + 27 = 55.$$

Чтобы получить 60 (ближайшее сверху число, кратное 10), нужно добавить 5. Это и есть контрольная цифра. Таким образом, карта получает свой номер окончательно (рис. 47).

Рисунок 47. **Правильный номер карты «Мир»**

Если человек при вводе номера (или сканер при считывании) ошибётся, возникнет сообщение об ошибке. Можно ли случайно ввести неверный номер с правильной контрольной цифрой? Да, такое возможно, но маловероятно. Защита с помощью одной контрольной цифры считается достаточной.

Примерно так же защищены от ошибки ввода номера банковских счетов, номер налогоплательщика, номер пенсионного свидетельства, лицевые счета на квартплату и многие другие персональные данные.

Похожим образом защищается от ошибок информация при передаче по мобильным сетям или Интернету. Каждый символ в сообщении кодируется числом, и их сумма (**контрольная сумма**) передаётся вместе с сообщением. Если из-за помех информация случайным образом исказилась, то практически наверняка контрольная сумма окажется неверной. Вероятность случайного совпадения настолько мала, что ею можно пренебречь.

Вместе с основной информацией передаётся **избыточная информация**, позволяющая проверить корректность передачи основной информации.

Избыточность языка — вероятностная защита

Защита с помощью избыточной информации появилась вместе с человеческой речью. Когда мы видим опечатку в тексте, обычно понимаем, что это опечатка, и можем легко догадаться, какое слово должно быть в этом месте. Дело в том, что русский язык избыточен, как и любой другой естественный язык. Если случайно пропала нужная буква, появилась лишняя или буквы поменялись местами, то на помощь приходят соседние буквы и слова, иногда даже согласование слов по падежам, родам и числам помогает нам восстановить смысл написанного — языки обладают высокой избыточностью.

Ни у кого не возникнет сомнений в том, что такое «стаитстика», «минная каша» или «причастный обормот». Смысл пропал, но не совсем. Его можно восстановить.

Чем курьёзнее опечатка, тем легче её исправить. И только в редких случаях избыточности языка не хватает, чтобы понять, что имелось в виду. Например, человек написал, что он «помял машину», а на самом деле он её всего лишь помыл. Смысл не пропал, он стал другим. Такие незаметные ошибки приводят к недоразумениям, но они маловероятны, поэтому случаются нечасто.

Избыточность языка позволяет создавать алгоритмы проверки орфографии и исправления опечаток при вводе текста в компьютер или смартфон.

Иное дело — математический язык. В нём нет избыточности. Почти любая описка или опечатка в записи числа или в математическом выражении меняет смысл, и часто не остаётся следов. Например, хотел школьник написать 72, но почему-то написал 12 (может быть, в черновике написал семёрку, похожую на единицу, а потом переписал эту единицу в чистовик). Не очень страшно, если это случилось в домашнем задании. Если же такое произойдёт на экзамене, никто потом не сумеет доказать, что имелось в виду не то, что написано: восстановить задуманное по соседним цифрам или знакам невозможно.

Поэтому математические расчёты и записи, особенно ответы на экзамене, нужно обязательно проверять два, а то и три раза. Проверка, которую всегда советуют делать учителя математики, — это вероятностная защита от досадных ошибок.

Вопросы

1 Падение сосульки с крыши на голову пешехода — событие маловероятное. Что нужно делать для того, чтобы эту вероятность ещё уменьшить?

2 В каких случаях не следует доверяться правилу: «В однократном опыте маловероятное событие не происходит»?

3 Приведите несколько примеров маловероятных событий из жизни.

4 В фантастической повести Аркадия и Бориса Стругацких «Понедельник начинается в субботу» есть эпизод, когда герои сначала находят умершего попугая, на лапке у которого кольцо с номером 190 573. На следующий день они видят такого же больного попугая с этим же номером, который умирает на их глазах. Ещё через день к ним в лабораторию влетает весёлый и здоровый попугай с таким же номером на лапке. Герой повести Александр Привалов рассуждает следующим образом.

Всё происходящее, рассуждал я, по-настоящему удивительно, только если считать, что эти три или четыре попугая — один и тот же попугай. Они действительно так похожи друг на друга, что вначале я был введён в заблуждение. Это естественно. Я математик, я уважаю числа, и совпадение номеров — в особенности шестизначных — для меня автоматически ассоциируется с совпадением пронумерованных предметов.

Объясните своими словами, что имеют в виду авторы в последнем предложении, говоря от имени Привалова о совпадении номеров и предметов.

5 Подумайте, зачем в алгоритме защиты банковской карты умножать цифры на нечётных местах на 2 перед тем, как складывать цифры. Почему берут остаток от деления на 9, а не на 10?

Задачи

186 Обычную симметричную монету, у которой на одной стороне изображён орёл, а другая сторона — решка, бросили шесть раз. Все шесть раз эта монета выпадала орлом. Какое утверждение или какие из утверждений верны?

а) В следующий раз более вероятно, что выпадет орёл, чем решка.

б) В следующий раз более вероятно, что выпадет решка.

в) В следующий раз орёл и решка могут выпасть с равными шансами.

г) Седьмой раз подряд орёл выпасть не может.

д) При седьмом броске тоже выпадет орёл.

187 Для правильной монеты мы полагаем, что вероятность выпадения орла равна 0,5. Разумно ли ожидать, что при 100 бросаниях монеты орёл выпадет:

а) 5 раз; б) 49 раз; в) 90 раз?

188 Подбросьте монету 10 раз. Удалось ли вам с первой попытки выбросить десять орлов? Как вы думаете, можно ли считать такое событие маловероятным?

189 Бросьте игральную кость 6 раз. Выпало ли шесть шестёрок? Можно ли считать такое событие маловероятным?

190 Вероятность выпадения шестёрки на правильной кости равна $\frac{1}{6}$. Сколько раз, по вашему мнению, следует ожидать выпадение шестёрки при 600 бросаниях кости?

191 Игральную кость бросают 6 раз. Является ли, по вашему мнению, маловероятным случайное событие:

а) шестёрка не выпадет ни разу;

б) какая-то грань выпала более одного раза?

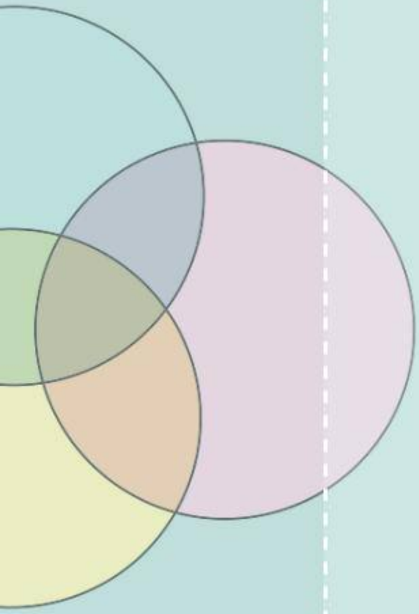
192 Правильную игральную кость бросили 6 раз. Оказалось, что единица выпала дважды. Означает ли это, что какое-то число очков не выпало ни разу?

193 В тесте по биологии 16 задач с выбором ответа из четырёх предложенных вариантов. Верный вариант только один. Тройку ставят за 4 правильных ответа, четвёрку — за 12, а пятёрку — за 15 правильных ответов. Вася не готов к тесту и выбирает ответы наудачу. Разумно ли ожидать, что Вася получит:

а) отметку «3»; б) отметку «4»; в) отметку «5»?

VII Множества

Множество — важнейшее математическое понятие, один из начальных «кирпичиков», из которых строится математика. Поскольку множество — понятие начальное, его нельзя определить, то есть точно сказать, что это такое. Множество нужно понимать как набор, массив или коллекцию каких-то элементов. Говоря в статистике о числовых массивах, мы имеем дело с множествами чисел. Геометрическая фигура — это множество точек на плоскости. Школьный класс — множество школьников, которые в нём учатся.



32 **Множество, подмножество, примеры множеств**

33 **Операции над множествами. Диаграммы Эйлера**

34* **Множества решений неравенств и систем**

35* **Правило умножения**

32 Множество, подмножество, примеры множеств

Множества, примеры и обозначения

Нельзя точно сказать, что такое **множество**. Ведь чтобы дать определение новому понятию, нужно уже что-то иметь. Треугольник определяется с помощью отрезков, отрезки — с помощью прямых и точек. Точка и прямая — понятия начальные, поэтому их не определяют. Точно так же невозможно определить множество — это начальное понятие. Мы получаем представление о множествах на примерах.

Мы собираем во множество некоторые объекты и называем их **элементами множества**. Например, можно говорить о множестве автомобилей на парковке возле дома. Автомобили на парковке — элементы этого множества. Другие автомобили (не на этой парковке) в это множество не входят. Геометрическая фигура — это некоторое множество точек.

Иногда мы используем синонимы к слову «множество»: массив, набор, коллекция.

Множество можно собрать из разнородных предметов. Можно, например, рассмотреть множество, состоящее из карандаша, облака и ботинка. Но такие множества обычно бесполезны. Полезны множества, у которых элементы обладают общим признаком. Например, множество деревьев в каком-то парке, множество дождливых дней в ноябре в нашем городе или множество букв греческого алфавита. По таким описаниям мы можем точно сказать, принадлежит элемент множеству или нет.

Множество можно задать одним из двух способов.
1. Можно явно перечислить все элементы множества.
2. Можно описать множество, то есть указать признак, которым обладают все элементы этого множества.

ПРИМЕР 1. Множество состоит из слов «понедельник», «вторник», «среда», «четверг», «пятница», «суббота», «воскресенье». Сейчас это множество задано перечислением элементов. Но можно его описать: множество названий дней недели.

Обозначать множества принято латинскими буквами или с помощью фигурных скобок, в которых перечислены все элементы.

ПРИМЕР 2. При бросании игрального кубика может выпасть грань с числами от 1 до 6. Множество результатов бросания игрального кубика можно записать перечислением в фигурных скобках: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Можно обозначить это множество, например, буквой A. Тогда

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Чтобы указать, что некоторый элемент **принадлежит** множеству, используют значок $\in$ (читается «принадлежит»).

Например, запись $6 \in A$ читается «число шесть принадлежит множеству A», а запись $7 \notin A$ означает, что число 7 множеству A не принадлежит.

Слово «множество» намекает на то, что элементов может быть много. Но это необязательно. Элемент может быть один. Например, множество решений уравнения $2x = 6$ состоит из одного-единственного числа 3.

Более того, множество может быть **пустым**, то есть не иметь элементов вовсе. Скажем, множество чётных делителей числа 3 пустое, таких чисел не существует. Обозначают пустое множество символом $\varnothing$.

Пустое множество — это множество, которое не содержит элементов.

Подмножества

ПРИМЕР 3. Пусть A — множество всех треугольников, а B — множество всех равнобедренных треугольников. Каждый равнобедренный треугольник является треугольником. Поэтому можно сказать, что множество B **включается** в множество A, и наоборот, множество A **включает** в себя множество B. Ещё в таких случаях говорят, что множество B является **подмножеством** множества A и пишут $B \subset A$.

Это означает, что все элементы множества B в то же время являются элементами множества A.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если любой элемент множества B принадлежит множеству A.

ПРИМЕР 4. Пусть множество K — это множество всех студентов в каком-то вузе. Тогда множество девушек, которые учатся в этом вузе (множество G), является подмножеством: $G \subset K$.

ПРИМЕР 5. Пусть A — множество натуральных чисел от 1 до 3:

$$A = \{1,\ 2,\ 3\}.$$

У этого множества восемь подмножеств. Например, подмножествами являются множества $\{1\}$, $\{2,\ 3\}$, само множество A и пустое множество $\varnothing$. На рисунке 48 показан граф, где изображены все восемь подмножеств множества A. Рёбра соединяют каждую вершину-множество со всеми его подмножествами на следующем уровне. Двигаясь вниз по рёбрам, можно пройти от каждого множества ко всем его подмножествам. Граф напоминает кубик.

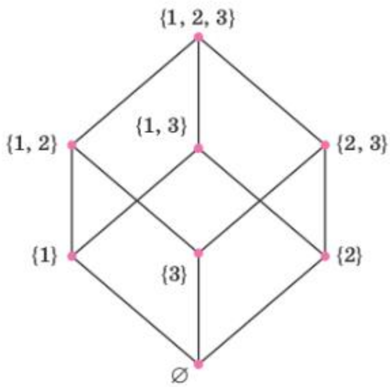


Рисунок 48

Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя. Поэтому, каково бы ни было множество A, можно записать: $\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.

Комментарий. Может показаться, что утверждение $\varnothing \subset A$ противоречит определению. Определение гласит, что любой элемент подмножества является элементом самого множества. Но ведь пустое множество не содержит элементов! Надо разобраться. Перепишем утверждение $\varnothing \subset A$ в виде:

«**Если** элемент принадлежит пустому множеству $\varnothing$,
то он принадлежит множеству A».

Посылка «элемент принадлежит пустому множеству» — ложная! А из лжи, как мы знаем, следует что угодно. Поэтому утверждение $\varnothing \subset A$ является истинным высказыванием. Мы доказали это утверждение, пользуясь законами логики.

Числовые множества

Мы часто имеем дело с множествами, состоящими из чисел. Они так важны, что в математике за ними закрепились постоянные обозначения — имена, понятные любому математику.

1. Множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ обозначается $\mathbb{N}$. Истинны утверждения

$$2 \in \mathbb{N};\ 1{,}5 \notin \mathbb{N};\ -4 \notin \mathbb{N}$$

(знак $\notin$ читается «**не принадлежит**»).

2. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$. Например,

$$2 \in \mathbb{Z};\ 1{,}5 \notin \mathbb{Z};\ -4 \in \mathbb{Z};\ 0 \in \mathbb{Z}.$$

3. Множество рациональных чисел, то есть чисел, которые можно выразить отношением двух целых чисел, обозначают $\mathbb{Q}$. Можно записать:

$$2 \in \mathbb{Q};\ 1{,}5 \in \mathbb{Q};\ 0 \in \mathbb{Q};\ \frac{2}{5} \in \mathbb{Q};\ \pi \notin \mathbb{Q}.$$

Последнее утверждение истинно, поскольку число π (длина полуокружности единичного радиуса) не является рациональным числом. Его невозможно представить в виде отношения двух целых чисел.

4. Множество всех чисел на координатной прямой обозначают $\mathbb{R}$.

Перечисленные множества включаются одно в другое:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Рисунок 49. **Числовой отрезок [0; 1]**

Числовые промежутки — отрезки, интервалы, полуинтервалы — также являются числовыми множествами. Например, числовой отрезок $[0; 1]$ — это множество, которое состоит из чисел 0, 1 и всех чисел, заключённых между ними (рис. 49).

Можно сказать, что математические записи $a \leqslant x \leqslant b$ и $x \in [a; b]$ выражают одно и то же. Первая на языке арифметики, а вторая на языке теории множеств.

Вопросы

1 Какие способы задания множеств вам известны? Приведите примеры.

2 Пусть O — множество нечётных, а E — множество чётных натуральных чисел. Известно, что $X \subset O$ и $X \subset E$. Что можно сказать о множестве X?

3 Известно, что $B \subset A$. Верно ли, что в множестве B меньше элементов, чем в множестве A?

Задачи

194 Перечислите все элементы множества:

а) различных остатков при делении на 5;

б) простых чисел, которые больше 10 и меньше 20;

в) названий месяцев, заканчивающихся на «ябрь».

195 Какие из следующих множеств пустые?

а) Множество $\{0\}$.

б) Множество простых чисел, которые делятся на 10.

в) Множество квадратов, имеющих острый угол.

196 Пусть множество C состоит из результатов броска монеты. Его элементы — орёл и решка: $C = \{О, Р\}$. Выпишите все подмножества множества C.

197 Обозначим буквой A множество делителей числа 15, а буквой B — множество делителей числа 5. Является ли одно из них подмножеством другого?

198 Множество $M = \{A, B, C, D\}$ состоит из четырёх точек на плоскости. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Можно составить множество $N = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$, элементами которого являются всевозможные отрезки с концами в этих точках.

а) Запишите множество T всех треугольников с вершинами в точках A, B, C и D.

б) Выпишите подмножество множества N, состоящее из всех отрезков с концом в точке B.

199 Дано множество $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Какие из следующих утверждений истинны?

а) $2 \in M$; в) $3 \in M$; д) $\{2, 4\} \subset M$;

б) $\{3, 5\} \subset M$; г) $M \subset \varnothing$; е) $\varnothing \subset M$.

200 Докажите, что если $B \subset A$ и $C \subset B$, то $C \subset A$.

201 Игральную кость бросают 2 раза. Пусть A — множество всех пар $(a; b)$, где a — число очков, выпавших при первом броске, b — число очков, выпавших при втором броске. Запишите все элементы множества A, удовлетворяющие условию:

а) сумма выпавших очков равна 4;

б) наибольшее из выпавших очков равно 3.

202 Даны множества:

A — множество чётных целых чисел;

B — множество нечётных целых чисел;

C — множество всех натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 2;

D — множество всех натуральных чисел, которые при делении на 6 дают остаток 2.

Для каких из этих множеств множество P является подмножеством, если:

а) $P = \{14, 26, 122\}$; б) $P = \{27, 37, 107\}$?

33 Операции над множествами. Диаграммы Эйлера

Пересечение множеств

Разные множества могут иметь общие элементы. Эти элементы тоже образуют новое множество, которое называют **пересечением** данных множеств. Для обозначения пересечения множеств используют значок $\cap$.

Пересечение множеств A и B — это множество $A \cap B$, которое содержит элементы, принадлежащие и множеству A, и множеству B.

Аналогично можно определить пересечение любого количества множеств.

ПРИМЕР 1. Пусть даны два множества:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ и } B = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Их пересечением является множество

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

Числа 1 и 4 не принадлежат множеству B, поэтому они не принадлежат и пересечению. Точно так же числа 5 и 7 не принадлежат множеству A, поэтому они не принадлежат пересечению. Зато числа 2 и 3 принадлежат обоим множествам. Поэтому они и образуют пересечение $A \cap B$.

Объединение множеств

Два или несколько множеств можно объединить в одно. Получится новое множество, которое называют **объединением**. Для обозначения объединения множеств используют значок $\cup$.

Объединение множеств A и B — это множество $A \cup B$, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

ПРИМЕР 2. Объединим множества A и B из примера 1. Получится числовое множество

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}.$$

Числа 1 и 4 принадлежат объединению $A \cup B$, потому что они принадлежат множеству A, числа 5 и 7 принадлежат $A \cup B$, потому что они принадлежат множеству B, а числа 2 и 3 принадлежат обоим множествам A и B, поэтому они тем более принадлежат их объединению, но считаются только по одному разу, а не по два.

При объединении множеств общие элементы учитываются один раз.

ПРИМЕР 3. Даны два числовых отрезка: $[-1; 3]$ и $[2; 5]$. Найдём их пересечение и объединение. Для этого изобразим оба отрезка на числовой прямой.

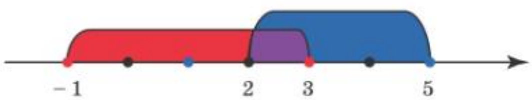
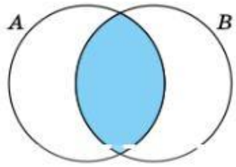


Рисунок 50

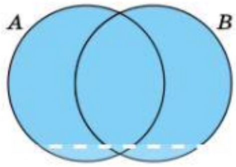
На рисунке 50 видно, что объединением является отрезок $[-1; 5]$, а пересечением — общая часть данных отрезков, то есть отрезок $[2; 3]$.

Диаграммы Эйлера

Мы изобразили на координатной прямой два числовых множества, и это помогло нам увидеть их пересечение и объединение. Как быть с другими множествами? Можно ли придумать способ изображения множеств произвольной природы?



а) Пересечение множеств A и B



б) Объединение множеств A и B

Рисунок 51

Удобно использовать **диаграммы Эйлера**[1]. Сами множества A и B изобразим кругами. Тогда общая часть этих кругов изображает множество $A \cap B$ (рис. 51, *а*). На рисунке 51, *б* закрашено объединение множеств A и B.

На рисунке 51 мы изображали множества A и B кругами. Это не обязательно. Можно использовать квадраты, треугольники и вообще любые фигуры. Главное — правильно показать, как множества связаны друг с другом.

Диаграмма Эйлера — способ графического представления множеств и операций над ними с помощью геометрических фигур.

На диаграммах Эйлера можно показывать не только объединение и пересечение. Можно наглядно представить включение одного множества в другое.

ПРИМЕР 4. Дана диаграмма Эйлера (рис. 52). Запишем все связи между множествами A, B и C, которые только можно увидеть на этой диаграмме.

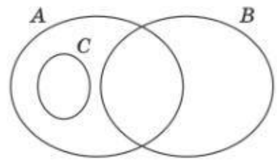


Рисунок 52

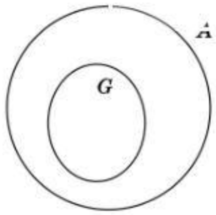
Мы не знаем, что это за множества и каковы их элементы. Диаграмма Эйлера даёт мало информации, но всё же кое-что сказать можно.

1. Множества A и B имеют непустое пересечение.
2. Множество C является подмножеством множества A: $C \subset A$.
3. Множества C и B не пересекаются. Можно сказать, что их пересечение — пустое множество: $B \cap C = \varnothing$.

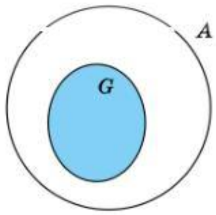
Иногда можно понять не только то, как связаны сами множества, но и как связано число элементов в одном множестве и число элементов во втором множестве.

ПРИМЕР 5. В первом классе 24 ученика, из них 15 — девочки. Обозначим множество всех учеников буквой A, а множество, состоящее из всех девочек этого класса, — буквой G. Сколько элементов содержит множество: а) $A \cap G$; б) $A \cup G$?

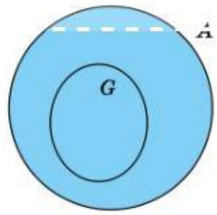
Решение. Каждая девочка в классе является ученицей. Поэтому $G \subset A$. Изобразим множества на диаграмме (рис. 53, *а*).



а) Фигура G внутри фигуры A



б) $A \cap G = G$



в) $A \cup G = A$

Рисунок 53

[1] Часто такие диаграммы называют диаграммами Эйлера — Венна или короче: круги Эйлера.

Чтобы получить пересечение, нужно закрасить общую часть фигур A и G (рис. 53, *б*). Но общая часть совпадает с фигурой G, поскольку она полностью лежит внутри фигуры A. Значит, $A \cap G = G$, а поэтому пересечение содержит ровно 15 элементов.

Чтобы найти объединение, нужно закрасить обе фигуры (рис. 53, *в*). Но получается фигура A, поскольку G лежит внутри. Значит, $A \cup G = A$, поэтому множество $A \cup G$ содержит ровно 24 элемента — столько, сколько содержит множество A.

На этом примере с помощью диаграмм Эйлера мы проиллюстрировали важное свойство множеств, одно из которых содержит другое.

Свойство. Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$ и $A \cup B = A$.

Вопросы

1 Сравните два способа изображать множества — числовую прямую и диаграмму Эйлера. Как вы думаете, в каких случаях удобнее использовать числовую прямую? В каких случаях удобнее диаграмма Эйлера?

2 A и B — два множества. Является ли утверждение $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ истинным или ложным высказыванием?

3 Может ли утверждение $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ быть истинным? Если да, то приведите пример таких множеств A и B.

Задачи

203 Даны два множества $C = \{a, o, d, q\}$ и $D = \{p, o, t, q\}$.

а) Перечислите элементы множества $C \cap D$;

б) Перечислите элементы множества $C \cup D$.

204 Даны два числовых промежутка $(-3; 4]$ и $(-2; 7]$. Запишите промежуток, который является:

а) их объединением;

б) их пересечением.

205 Изобразите на диаграмме Эйлера множества X и Y, для которых выполняются соотношение:

а) $X \cap Y = X$; б) $X \cup Y = X$; в) $X \cup Y = \varnothing$.

206 Перерисуйте в тетрадь диаграмму Эйлера (рис. 54) и укажите на ней множество:

а) $A \cup (B \cap C)$; б) $A \cap (B \cup C)$.

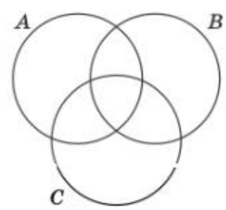


Рисунок 54

207 Пользуясь диаграммой Эйлера, проверьте, верно ли равенство:

а) $A \cup (B \cap A) = B$; б) $A \cap (B \cup A) = A$.

208 Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

209 Двенадцать малышей вышли во двор играть в песочнице. Каждый, кто принёс ведёрко, принёс и совочек. Забыли дома ведёрко девять малышей, совочек забыли двое. На сколько меньше тех, кто принёс ведёрко, чем тех, кто забыл дома ведёрко, но принёс совочек?

34* Множества решений неравенств и систем

ПРИМЕР 1. Предположим, что нужно решить систему двух неравенств с одной переменной. Например, систему

$$\begin{cases} 3x-2<1, \\ 4x+5>-3. \end{cases}$$

Преобразуем оба неравенства и получим:

$$x < 1 \text{ и } x > -2.$$

Эти два условия должны выполняться одновременно. Иными словами, мы ищем такие значения x, которые удовлетворяют и первому неравенству, и второму. Значит, нужно найти пересечение множеств $(-\infty; 1)$ и $(-2; +\infty)$. Уже знакомый нам способ (рис. 55) даёт решение: интервал $(-2; 1)$.

Ответ: $(-2; 1)$.

ПРИМЕР 2. Не обязательно решение неравенств или систем сводится к поиску пересечения числовых промежутков. Рассмотрим неравенство

$$|x-3| \geqslant 5.$$

Это неравенство можно прочесть так: «Расстояние от числа x до числа 3 не меньше, чем 5». Все такие числа x можно изобразить на числовой прямой. Они попадают в два промежутка $(-\infty; -2]$ и $[8; +\infty)$ (рис. 56). Решением неравенства является любое число из любого из этих двух промежутков. Поэтому решением неравенства является объединение этих двух промежутков.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [8; +\infty)$.

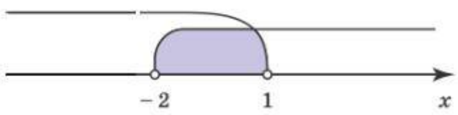


Рисунок 55

Рисунок 56

Умение находить пересечения и объединения множеств позволяет находить и верно записывать множества решений уравнений, неравенств и систем.

Вопросы

1 Вспомните, какие виды числовых промежутков вам известны.

2 Каким множеством может быть пересечение двух числовых отрезков?

3 Каким множеством является объединение двух числовых отрезков, которые имеют общую точку?

4 Каким множеством может быть пересечение двух числовых лучей?

Задачи

210 Найдите пересечение двух числовых промежутков и изобразите промежутки и их пересечение на числовой прямой.

а) $1 \leqslant x \leqslant 3$ и $2 < x \leqslant 8$;

б) $x > 8$ и $x > 5$;

в) $x \leqslant 1{,}5$ и $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

г) $2 < x < 9$ и $x \geqslant 5{,}7$.

211 Изобразите объединение числовых промежутков на числовой прямой.

а) $3 < x \leqslant 5$ и $4 < x \leqslant 8$;
б) $x > 2$ и $x < -1$;
в) $x \geqslant 6$ и $x \leqslant 9$;
г) $5 \leqslant x < 7$ и $x > 4$.

212 Запишите с помощью знака объединения множество, изображённое на рисунке 57.

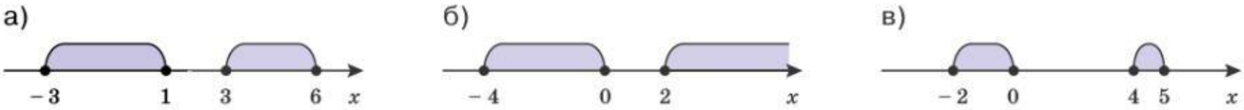


Рисунок 57

213 Найдите пересечение и объединение числовых промежутков:

а) [4; 7] и (0; 6);
б) (−5; 2) и (3; 7);
в) [−4; 1] и (−2; 5).
г) $(-\infty; 7]$ и $[5; +\infty)$.

214 Найдите пересечение и объединение числовых лучей:

а) $x < 6$ и $x \geqslant 4$;
б) $x \geqslant 5$ и $x \leqslant 1$.

215 Известно, что $x \in [1; 4]$ и $x \in (2; 5)$. Истинны ли утверждения:

а) $x \in (2; 4]$;
б) $3 \leqslant x \leqslant 4$;
в) $x \in (-5; 8)$;
г) $x > 2$?

216 Решая систему двух неравенств относительно переменной x, школьник получил отдельно решения обоих неравенств: $x \geqslant 3$ и $x \leqslant 7$. Укажите промежуток, который является решением системы, и изобразите его на числовой прямой.

217 При решении системы двух неравенств получились решения обоих неравенств: $x \leqslant -4$ и $x > 8$. Какое множество является решением системы?

218 Решая систему неравенств, школьник нашёл, что переменная a должна удовлетворять одновременно двум утверждениям: $a > 5$ и $a \geqslant 3$. Запишите множество всех значений a, которые являются решением задачи.

219 В задаче требовалось найти значения переменной y. Решая задачу, школьник нашёл, что переменная y должна удовлетворять хотя бы одному из двух неравенств: $3 < y \leqslant 4$ и $-2 \leqslant y \leqslant 0$. Запишите множество всех значений переменной y, которые не являются решением задачи.

35* Правило умножения

Предположим, у нас есть два множества. Что будет, если составить пары из элементов этих множеств? Например, на переговоры приезжают две дипломатические делегации из двух стран. В первой делегации 3 дипломата, а во второй 4 дипломата. Каждый дипломат пожимает руки всем дипломатам из другой делегации. Сколько всего случилось рукопожатий? Изобразим оба множества и рукопожатия с помощью графа (рис. 58).

Слева (красные вершины) — дипломаты из первой делегации, а справа (синие вершины) — из второй.

Можно считать, что каждое рукопожатие — это пара дипломатов. Таким образом, возникает множество пар. Сколько элементов в этом множестве? Очевидно, столько

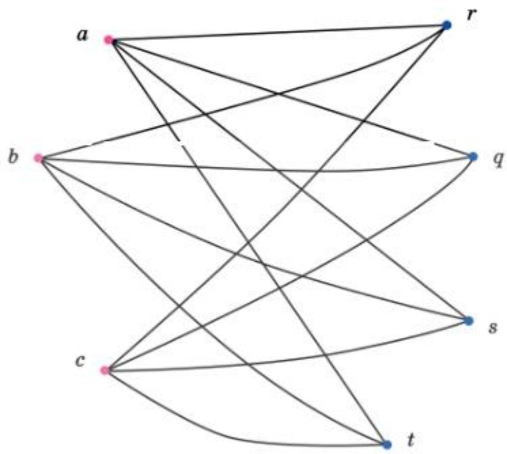


Рисунок 58

же, сколько рёбер в этом графе. Попробуйте, не пересчитывая, сразу сказать, сколько их.

Каждая из 3 красных вершин связана с четырьмя синими вершинами, значит, из каждой красной вершины исходит ровно 4 ребра. Всего красных вершин 3, поэтому всего рёбер $3 \cdot 4 = 12$.

Получается, что если имеется множество $A = \{a, b, c\}$, в котором 3 элемента, и множество $B = \{r, q, s, t\}$, в котором 4 элемента, то можно составить множество пар вида (a, r), (c, s) и т. п. В каждой паре сначала записан какой-то элемент множества A, а потом — какой-то элемент множества B. То есть пары **упорядоченные**, а всего этих пар 12.

Если в множествах A и B другое число элементов, скажем, пусть в множестве A всего n элементов, а в множестве B всего k элементов, то таким же рассуждением мы найдём, что множество упорядоченных пар состоит из nk элементов. Получается правило.

Правило умножения. Если множество A состоит из n элементов, а множество B — из k элементов, то множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, состоит из nk элементов.

Это правило иногда применяется не столь прямо, как мы это сделали в задаче о дипломатах. Иногда его приходится немного видоизменять.

ПРИМЕР 1. Предположим, что встречаются 6 человек, и каждый пожимает руки всем остальным. Сколько всего будет рукопожатий?

Решение. Кажется, что задача совсем другая, ведь у нас нет двух множеств, а есть только одно множество. Тем не менее правило умножения поможет и здесь. Составим все возможные пары, используя множество из 6 человек дважды. Тогда пар будет $6 \cdot 6 = 36$. Но при этом мы посчитали и пары, которые каждый образует сам с собой, то есть 6 пар лишние.

Если их удалить, то останется $36 - 6 = 30$ пар, но при этом каждое рукопожатие посчитано дважды. Например, если в этой группе есть Иван и Дмитрий, то получаются две пары (Иван, Дмитрий) и (Дмитрий, Иван), а рукопожатие они делают только одно. Поэтому рукопожатий вдвое меньше, чем пар: $\frac{30}{2} = 15$.

Рассуждая так же в общем виде, видим, что если в компании не шестеро, а n человек, то рукопожатий будет

$$\frac{n^2-n}{2}.$$

Можно было рассуждать даже проще: каждый из n человек пожал руку каждому из $n-1$ оставшихся, поэтому правило умножения даёт $n(n-1)$ упорядоченных пар, а неупорядоченных — вдвое меньше:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Убедитесь, что два полученных выражения тождественно равны.

ПРИМЕР 2. Сколько диагоналей у 10-угольника? Будем рассуждать похожим образом. Диагональ — это «рукопожатие двух вершин». Будем составлять пары: на один конец диагонали поставим любую из десяти вершин (синяя на рис. 59), а на другой — любую из семи вершин (кроме выбранной вершины и двух её соседей). Получается $10 \cdot 7$ упорядоченных пар. При этом каждую диагональ мы посчитали 2 раза. Значит, всего диагоналей вдвое меньше:

$$\frac{10 \cdot 7}{2} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Напишите выражение, которое показывает, сколько диагоналей у n-угольника.

С помощью правила умножения можно перечислять не только пары, но и тройки, четвёрки и т. д. Самостоятельно сформулируйте правило умножения для трёх или нескольких множеств.

ПРИМЕР 3. Сколько существует треугольников с вершинами в вершинах правильного пятиугольника (рис. 60)?

Решение. Первую точку можно выбрать пятью способами, вторую — четырьмя, третью — тремя. Получается $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ упорядоченных троек из этих пяти точек. При этом каждый треугольник мы посчитали 6 раз. Например, треугольник ABC посчитан ещё как треугольники ACB, BCA, BAC, CAB и CBA. Значит, 60 нужно разделить на 6.

Ответ: 10.

ПРИМЕР 4. Сколько существует способов составить очередь из 6 человек? Рассуждение похожее, и снова помогает правило умножения. На первой позиции любой из 6. Тогда за ним можно поставить любого из пяти оставшихся, за ним — одного из четырёх оставшихся, и т. д. Когда мы выберем предпоследнего (2 способа), останется кто-то один, кто и займёт последнее место. С помощью правила умножения получаем, что общее число способов составить разные очереди из шести человек равно

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

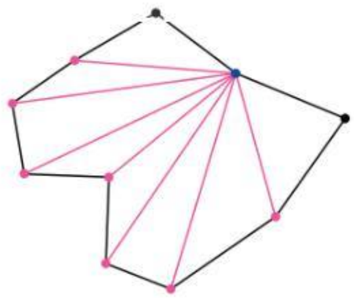


Рисунок 59

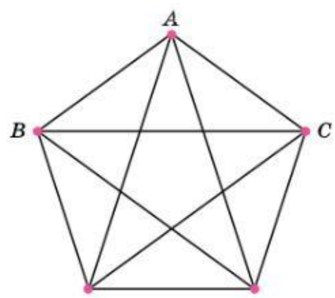


Рисунок 60

В теории вероятностей правило умножения помогает перечислять события. Мы знаем, что общее число результатов двукратного бросания костей можно найти по правилу умножения: $6 \cdot 6 = 36$. Если же мы бросаем три монеты, то может случиться один из $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ результатов, потому что каждый раз монета падает одной из двух сторон вверх.

ПРИМЕР 5. Сколько возможно различных результатов в случайном опыте, в котором игральный кубик бросают 3 раза; 4 раза?

Решение. При трёхкратном бросании правило умножения даёт

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$$

вариантов, а если шестигранную кость бросить четыре раза, то может случиться один из $6^4 = 1296$ результатов.

Вопросы

1 Сформулируйте правило умножения для двух множеств.

2 Сколько может быть различных результатов при бросании трёх монет?

Задачи

220 В группе детского сада 11 мальчиков и 8 девочек. Сколько можно составить пар «мальчик — девочка»?

221 В множестве A восемь элементов, а в множестве B пять элементов. Сколько можно составить пар вида $(a; b)$, где $a \in A$ и $b \in B$?

222 Игральная кость имеет форму правильного двенадцатигранника. Грани пронумерованы числами от 1 до 12. Эту кость бросают 2 раза. Сколько существует различных результатов? Считайте, что пары выпавших чисел упорядочены: например, сначала 8, а затем 12 и сначала 12, а затем 8 — это разные результаты.

223 Сколько существует натуральных трёхзначных чисел, которые начинаются не цифрой 9 и при этом делятся на 5?

224 Сколько существует натуральных четырёхзначных чисел, которые составлены только из:

а) чётных цифр;

б) нечётных цифр?

225 Сколько диагоналей:

а) у 15-угольника;

б) у 20-угольника?

226 Натуральное число называется палиндромом, если оно одинаково читается в обе стороны. Например, числа 343 и 89 398 – палиндромы.

Сколько существует:

а) трёхзначных чисел-палиндромов;

б) четырёхзначных чисел-палиндромов;

в) семизначных палиндромов;

г) восьмизначных палиндромов?

227 Четыре подруги отправляли друг другу новогодние открытки: каждая отправила по одной трём другим. Сколько всего открыток было отправлено?

228 У Вити восемь разных учебников. Сколько существует способов поставить их в ряд на книжной полке?

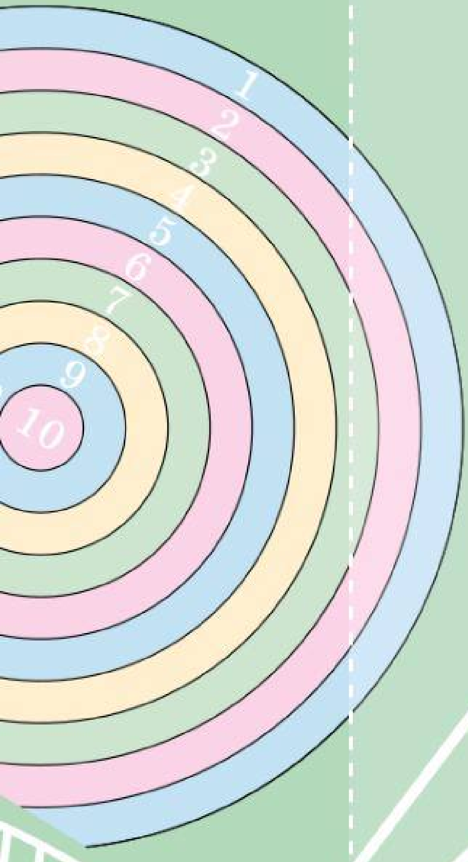
229 Сколько существует способов:

а) рассадить пять человек вокруг круглого стола на пять стульев;

б) поставить этих пятерых в хоровод вокруг ёлки?

230 Сколько четырёхзначных натуральных чисел можно составить из цифр от 1 до 9 таким образом, чтобы каждая следующая цифра была больше предыдущей (например, 1367)?

VIII Математическое описание случайных явлений



В этой главе мы повторим то, что уже знаем о случайных событиях, и рассмотрим случайные события как множества, состоящие из элементарных событий.

Чтобы определить вероятности событий в случайном опыте, нужно задать вероятности элементарных событий. Это сделать легко, если все элементарные события имеют одинаковые шансы: они равновозможны. Чаще всего такие опыты искусственные: они связаны с играми или жребиями. Мы научимся вычислять вероятности событий в таких опытах.

36 **Случайные опыты и элементарные события**

37 **Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события**

38 **Благоприятствующие элементарные события**

39 **Вероятности событий**

40 **Опыты с равновозможными элементарными событиями**

41 **Случайный выбор**

36 Случайные опыты и элементарные события

Ещё раз обратим внимание на то, что о случайных событиях можно говорить только при определённых условиях. Если нет условий, то нет и событий. Например, случайное событие «выпадение орла» возможно только в опыте с подбрасыванием монеты. Без этого о выпадении орла говорить нельзя. О случайном событии «электрическая лампочка прослужит более 100 часов» можно говорить, только если имеется лампочка, которую включают в электрическую сеть.

Условия и действия, при которых может наступить случайное событие, принято называть **случайным опытом** или **случайным экспериментом**.

Точное математическое определение случайного опыта дать непросто. Для этого требуются абстрактные понятия, которые уведут нас далеко от цели.

Мы не даём определение случайного опыта так же, как в учебнике геометрии не даётся определение плоскости. Вместо этого мы иллюстрируем понятие случайного опыта многочисленными примерами.

Иногда случайный опыт — это действительно опыт, вроде бросания игральной кости или испытания лампочки. А иногда слово «опыт» подходит меньше. Например, гроза в определённый летний день, без сомнения, случайное событие. Но здесь случайный опыт проводит не человек, а природа.

Наступление некоторых событий можно предсказать. Мы твёрдо знаем, что любая электрическая лампочка в конце концов перегорит. В опыте с лампочкой это событие **достоверное**. Напротив, событие «лампочка никогда не перегорит» — **невозможное**.

Невозможное и достоверное события также принято считать случайными.

В случайном опыте могут произойти различные случайные события. Например, в результате бросания игральной кости можно говорить о событии «выпадет четвёрка» или о событии «выпадет чётное число очков». Событие «выпадет чётное число очков» можно разбить на три события: «выпадет два очка», «выпадет четыре очка», «выпадет шесть очков». А событие «выпадет четвёрка» на более простые события не разделяется.

События случайного опыта, которые нельзя разделить на более простые, называются **элементарными событиями** или **элементарными исходами**.

В каждом опыте можно выделить элементарные события, из которых состоят все остальные события. Здесь снова можно провести аналогию с геометрией. Геометрические фигуры на плоскости состоят из точек. Точно так же события внутри случайного опыта состоят из элементарных событий.

В результате случайного опыта обязательно наступает только одно элементарное событие.

ПРИМЕР 1. При подбрасывании игральной кости элементарных событий шесть: «выпадет одно очко», «выпадет два очка» и т. д., вплоть до события «выпадет шесть очков». Коротко их можно записать цифрами: «1», «2», «3», «4», «5», «6».

В более сложных опытах элементарных событий больше.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим опыт, где игральную кость бросают два раза. В этом опыте $6 \cdot 6 = 36$ элементарных событий. Все эти 36 элементарных событий удобно представить в виде таблицы.

Номер строки показывает, сколько очков выпало при первом броске, а номер столбца — сколько очков выпало при втором броске. Если выпала, например, комбинация (1, 5), это можно изобразить штриховкой или крестиком в соответствующей ячейке (рис. 61).

	1	2	3	4	5	6
1					X	
2						
3						
4						
5						
6						

Рисунок 61.
Таблица эксперимента «двукратное бросание кости»

При двух бросаниях игральной кости элементарным событием является **упорядоченная пара** чисел.

Вопросы

1 Школьник говорит: «Я написал изложение и не сделал ни одной ошибки». Что здесь является случайным опытом, а что — случайным событием?

2 В классе 25 учеников. Учитель во время урока вызывает к доске одного ученика. Сколько различных элементарных событий имеет этот случайный опыт?

3 Могут ли в результате опыта одновременно наступить два различных элементарных события?

4 Перечислите элементарные события опыта, где игральную кость бросают один раз.

5 Назовите элементарные события, которые возникают при бросании математической монеты.

6 Что является элементарным событием в опыте, где игральную кость бросают 2 раза? Сколько элементарных событий в этом опыте?

7 Почему при двукратном бросании монеты элементарное событие ОР (сначала выпал орёл, затем — решка) нельзя разделить на два более простых события: «выпал орёл» и «выпала решка»?

Задачи

231 Игральную кость бросают 2 раза. Укажите, какие из перечисленных ниже случайных событий являются невозможными, а какие — достоверными.

A «сумма выпавших очков меньше, чем 100»;

B «в сумме выпадет одно очко»;

C «в сумме выпадет 13 очков»;

D «в сумме выпадет два или больше очков».

232 Из множества натуральных чисел от 1 до 100 выбирают два различных числа. Какие из перечисленных ниже событий невозможные, а какие — достоверные?

A «одно из чисел больше другого»;

B «одно из чисел больше другого на 100»;

C «сумма выбранных чисел — положительное число»;

D «одно из двух данных чисел меньше половины другого числа».

233 Андрей и Борис решили купить мороженое и встали в очередь перед киоском «Мороженое». Сколькими способами они могут расположиться друг за другом? Выпишите все эти способы.

234 В киоске продаётся мороженое трёх сортов: сливочное, шоколадное и клубничное. Андрей и Борис покупают по одной порции. Выпишите в виде таблицы элементарные события этого опыта. Сколько всего получилось элементарных событий? Перечертите в тетрадь и продолжите заполнять таблицу 48.

Таблица 48

Андрей	Борис
Сливочное	Сливочное

235 Андрей, Борис и Владимир решили купить мороженое и встали в очередь. Сколькими способами они могут расположиться друг за другом? Выпишите все эти способы.

236 Игральную кость подбрасывают дважды. Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий этого эксперимента. Закрасьте в таблице элементарные события, при которых в сумме выпадет:

а) менее 4 очков; в) ровно 11 очков;

б) ровно 7 очков; г) чётное число очков.

237 При подбрасывании монеты будем обозначать буквой О выпадение орла, буквой Р — выпадение решки. Подбросим монету два раза. Элементарное событие «выпадет два орла» записывается как ОО. Выпишите все элементарные события этого опыта. Сколько их?

238 Монету бросают 3 раза. Выпишите все элементарные события этого опыта, пользуясь обозначениями О для орла и Р для решки.

239 а) Во сколько раз больше число элементарных событий при трёх бросаниях монеты, чем при двух бросаниях монеты?

б) Сколько элементарных событий при четырёх бросаниях монеты?

в) Сколько элементарных событий при десяти бросаниях монеты?

240 Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Пользуясь обозначениями О и Р, запишите несколько элементарных событий этого опыта. Сколько всего элементарных событий в этом случайном опыте?

241 Команда «Математик» проводит встречу из нескольких матчей по волейболу с командой «Физик». Ничья невозможна. Встреча проводится до двух побед одной из команд. Победу «Математика» обозначим буквой М, а победу «Физика» — буквой Ф. Одним из элементарных событий является ММ.

а) Запишите все возможные элементарные события.

б) Запишите все элементарные события, при которых встречу выигрывает команда «Физик».

в) Предположим, что во встрече победила команда «Математик». Какой буквой оканчивается запись соответствующих элементарных событий?

г) Какое наибольшее количество матчей может состояться?

242 В ящике три детали: две исправные детали a и b и одна бракованная деталь c. Из ящика наугад извлекают по одной детали, пока не обнаружат бракованную. Элементарные события этого опыта будем записывать в виде последовательности букв. Например, abc, ac и т. д.

а) Является ли последовательность cab элементарным событием в этом опыте?

б) Какими буквами может заканчиваться запись элементарного события?

в) Выпишите все элементарные события этого опыта.

243 Игральную кость подбрасывают трижды. Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

244 Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите количество элементарных событий, при которых в сумме выпадет:

а) 3 очка; б) 4 очка; в) 2 очка.

245 Игральную кость подбрасывают трижды. Найдите количество элементарных событий, при которых в сумме выпадет более:

а) 17 очков; б) 16 очков; в) 15 очков.

37 Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором три элементарных события. Обозначим их латинскими буквами a, b, c. Вероятности этих элементарных событий обозначим $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$.

Можно считать, что весь случайный опыт — это одно большое событие, которое обязательно наступит (оно достоверно), и приписать ему максимальную вероятность 1.

В результате эксперимента какое-то одно из элементарных событий обязательно наступает. Причём только одно, два элементарных исхода наступить не могут. Поэтому вероятности элементарных событий следует назначать, следуя двум правилам.

!

1. Вероятности элементарных событий неотрицательны.
2. Сумма вероятностей всех элементарных событий равняется единице.

Для трёх элементарных событий a, b и c должно выполняться равенство

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1.$$

Это свойство вероятностей является отражением такого же свойства частот. Повторим опыт N раз. Пусть элементарное событие a произошло $N(a)$ раз, событие b произошло $N(b)$ раз, событие c произошло $N(c)$ раз. Значит, частоты событий a, b и c равны $\frac{N(a)}{N}$, $\frac{N(b)}{N}$ и $\frac{N(c)}{N}$, и их сумма равна 1.

В некоторых случаях вероятности элементарных исходов можно рассчитать. В других случаях их можно оценить с помощью частот, проведя множество наблюдений. А иногда вероятности элементарных событий назначить не удаётся никак.

Интересен случай, когда элементарные события в опыте имеют одинаковые шансы. Например, при одном бросании игральной кости элементарные события — это 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Если кость правильная (симметричная), то шансы этих шести элементарных событий одинаковы.

Если в случайном опыте шансы всех элементарных событий одинаковы, то он называется случайным опытом с **равновозможными элементарными событиями**.

При бросании двух игральных костей элементарных событий 36, и все они равновозможны. Опыты с равновозможными элементарными событиями возникают при бросании костей, раздаче игральных карт, в лотереях, жребиях, социологических исследованиях и других искусственных экспериментах.

Равновозможные исходы возникают не только в играх или опросах. Есть очень важная математическая задача — генерация случайных чисел. Мы все пользуемся мобильными телефонами, а значит — многочисленными алгоритмами шифрования и защиты данных. Во всех этих алгоритмах используются случайные числа — десятичные дроби, которые с равными шансами выбираются из интервала от 0 до 1. Программа для создания случайных чисел называется **генератором случайных чисел**.

В природе опыты с равновозможными элементарными событиями встречаются очень редко.

Предположим, что в некотором случайном опыте N элементарных событий, и вероятность каждого равна p. Сумма всех вероятностей равна 1:

$$\underbrace{p+p+p+\ldots+p+p}_{N\text{ одинаковых слагаемых}}=1.$$

Значит, $Np = 1$, откуда $p = \frac{1}{N}$.

Получается правило, позволяющее назначать вероятности элементарных событий.

Правило. Если в случайном опыте ровно N равновозможных элементарных событий, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$.

Хотя в природе опыты с равновозможными элементарными событиями практически не встречаются, эти опыты очень важны. Во-первых, с помощью искусственных опытов с равновозможными событиями часто удаётся находить приближённые решения сложных и важных задач. Во-вторых, эксперименты с равновозможными событиями удобны при изучении теории вероятностей. Традиционно теорию вероятностей начинают изучать именно с таких опытов. Но здесь кроется опасность: из-за злоупотребления равновозможными элементарными событиями при обучении многие люди думают, что во всех опытах события равновозможны. Вспомним распространённую шутку.

— Какова вероятность встретить на прогулке живого динозавра? — спрашивает преподаватель студента.
— Одна вторая, — отвечает студент.
— Это почему же? — удивляется преподаватель.
— Либо встречу, либо нет.

Это, конечно, шутка. Но, как и во всякой шутке, в ней есть доля правды. Известен случай, когда подобную ошибку совершил знаменитый учёный Д'Аламбер[1], когда писал статью по теории вероятностей для энциклопедии.

Ошибка Д'Аламбера

В опыте, где монету бросают 2 раза, всего четыре элементарных события: ОО, ОР, РО и РР. Эти четыре события равновозможны из-за симметричности монет, и вероятность каждого из них равна $\frac{1}{4}$.

Если вместо того чтобы бросать монету 2 раза, мы одновременно бросим две одинаковые монеты, то элементарные события ОР и РО покажутся нам одним событием: ведь монеты одинаковы. Значит, в этом опыте три элементарных события: «два орла», «две решки» и «орёл и решка». Может возникнуть ошибочное впечатление, что вероятность каждого из них равна $\frac{1}{3}$. Именно так и посчитал Д'Аламбер.

На самом деле эти элементарные события не равновозможны: вероятность события «два орла» и вероятность события «две решки» равны $\frac{1}{4}$, а вероятность события «орёл и решка» равна $\frac{1}{2}$.

Вопросы

1 Какие элементарные события называют равновозможными?
2 Приведите примеры опытов, в которых элементарные события равновозможны.
3 Сформулируйте свойство суммы вероятностей всех элементарных событий случайного опыта.
4 Могут ли вероятности элементарных событий в случайном опыте быть не равны друг другу?
5 На какой ответ мог рассчитывать преподаватель из шутки про динозавра?

Задачи

246 Равновозможны ли элементарные события «выпал орёл» и «выпала решка» при бросании правильной монеты?

[1] Жан Лерон Д'Аламбер — французский учёный, который жил в XVIII в. и занимался математикой и физикой. В 1764 г. был избран почётным членом Санкт-Петербургской академии наук, хотя ни разу не был в России.

247 Автомобиль подъезжает к перекрёстку (рис. 62). Определим возможные элементарные события:
«автомобиль повернёт направо»,
«автомобиль повернёт налево»,
«автомобиль поедет прямо»,
«автомобиль развернётся и поедет обратно».
Можно ли считать эти элементарные события равновозможными? Объясните свой ответ.

Рисунок 62

Указание. Подумайте, так ли часто автомобили разворачиваются и едут обратно. Какие события будут случаться чаще, если автомобиль подъезжает к улице с более оживлённым движением?

248 Команда высшей лиги, встречаясь в матче по футболу с командой первой лиги, может либо победить или проиграть, либо встреча закончится вничью. Равновозможны ли эти элементарные события? Обоснуйте своё мнение.

249 Случайный опыт может закончиться одним из трёх элементарных событий: a, b или c. Чему равна вероятность элементарного события c, если:

а) $\mathrm{P}(a) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(b) = 0{,}2$;

б) $\mathrm{P}(a) = \frac{1}{2}$; $\mathrm{P}(b) = \frac{1}{3}$;

в) $\mathrm{P}(a) = 0{,}1$; $\mathrm{P}(b) = 0{,}01$;

г)* $\mathrm{P}(a) = p$; $\mathrm{P}(b) = 0{,}8 - p$? Какие значения может принимать p?

250 Игральная кость несимметрична. В таблице 49 показаны вероятности выпадения на этой кости 1, 2, 3, 5 или 6 очков. Найдите вероятность выпадения 4 очков.

Таблица 49. **Вероятности выпадения граней**

Число очков	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	?	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

251 В некотором случайном эксперименте все элементарные события равновозможны. Найдите вероятность каждого элементарного события, если всего в этом эксперименте количество элементарных событий равно:

а) 25; б) 17; в) 100.

252 Все элементарные события случайного опыта равновозможны. Сколько элементарных событий в этом опыте, если вероятность каждого равна:

а) $\frac{1}{3}$; б) 0,1; в) 0,125; г) $\frac{1}{k}$?

253 В каждом из двух случайных опытов все элементарные события равновозможны. В каком из этих опытов вероятность элементарного события больше, если:

а) в первом опыте элементарных событий больше, чем во втором;

б) в первом опыте элементарных событий меньше, чем во втором;

в) в этих опытах элементарных событий поровну?

254 При подбрасывании монеты обозначим буквой О выпадение орла и буквой Р выпадение решки. Подбросим симметричную монету 2 раза. Равновозможны ли элементарные события ОО, РО, ОР и РР? Найдите их вероятности.

255 Симметричную монету подбрасывают несколько раз. Найдите вероятности элементарных событий при:

а) 3 бросаниях; б) 4 бросаниях; в)* 10 бросаниях.

256 Три богатыря — Илья Муромец, Алёша Попович и Добрыня Никитич — ехали по дороге и увидели развилку, а на ней — придорожный камень с предупреждением:

Направо поедешь — коня потеряешь,
Налево поедешь — копьё потеряешь,
Прямо поедешь — головы не снесёшь.

Богатыри бросили жребий, разделились, и каждый поехал своей дорогой. Придумайте систему обозначений для элементарных событий этого опыта, запишите все элементарные события. Считая их равновозможными, найдите вероятность каждого из них.

257 Три первоклассника по очереди выбирают воздушные шарики. Каждый из них выбирает шарик одного из двух цветов: зелёного (З) или синего (С). Выпишите элементарные события этого эксперимента. Считая, что все они равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

258 Три первоклассника по очереди выбирают фломастеры. Каждый из них выбирает фломастер одного из трёх цветов: зелёного (З), синего (С) или красного (К). Сколько у этого опыта элементарных событий? Считая, что все элементарные события равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

259 Игральную кость подбрасывают несколько раз. Равновозможны ли элементарные события такого опыта? Найдите вероятность каждого элементарного события при: а) трёх бросаниях; б) четырёх бросаниях.

38 Благоприятствующие элементарные события

До сих пор мы обсуждали только элементарные события. Однако в случайных опытах могут возникать более сложные случайные события. Например, при бросании игральной кости возможно событие «выпадет чётное число очков» или событие «выпадет более двух очков». Для обозначения случайных событий будем употреблять большие латинские буквы A, B, C, D и т. д.

Случайным событием в случайном опыте называется произвольное множество, состоящее из элементарных событий этого опыта.

Например, событие A «выпадет чётное число очков» при бросании игральной кости состоит из трёх элементарных событий: «два очка», «четыре очка», «шесть очков». Можно записать событие A как множество с перечислением его элементов:

$$A = \{2,\ 4,\ 6\}.$$

Элементарное событие a «два очка» принадлежит этому событию: $a \in A$. Но чаще говорят, что элементарное событие a благоприятствует событию A. Слова «принадлежать» и «благоприятствовать» мы будем использовать как синонимы.

Элементарные события, при которых наступает событие A, называются **благоприятствующими событию A**.

Мы знаем, что в случайном опыте наступает только одно из элементарных событий. Но если элементарное событие благоприятствует двум различным событиям A и B, то события A и B могут произойти одновременно.

ПРИМЕР 1. Андрей, Борис и Владимир (А, Б и В) встают в очередь. Все возможные события в этом опыте складываются из элементарных событий, которых в данном случае всего шесть: АБВ, АВБ, БВА, БАВ, ВАБ, ВБА.

Рассмотрим событие «Владимир стоит первым». Оно наступает, если случилось одно из двух элементарных событий ВАБ и ВБА (рис. 63).

Элементарные события ВАБ и ВБА благоприятствуют событию «Владимир стоит первым».

Рисунок 63

ПРИМЕР 2. В этом же опыте событию «Борис стоит в очереди перед Андреем» благоприятствуют элементарные события БАВ, БВА и ВБА.

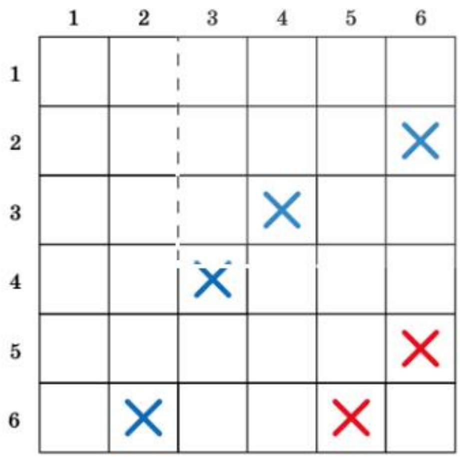


Рисунок 64

ПРИМЕР 3. Игральную кость бросают дважды.

Рассмотрим событие A «сумма очков равна 11». Этому событию благоприятствуют ровно два элементарных события: (6; 5) и (5; 6). Эти элементарные события отмечены на рисунке 64 красными крестиками.

Событие — это множество. Поэтому вместо словесного описания события можно записать событие A перечислением благоприятствующих элементарных событий в фигурных скобках: $A = \{(6;\ 5),\ (5;\ 6)\}$.

Событию B «произведение очков при двух бросках равно 12» благоприятствуют элементарные события (4; 3), (3; 4), (2; 6) и (6; 2). Они выделены на рисунке 64 синими крестиками. Можно записать: $B = \{(4;\ 3),\ (3;\ 4),\ (2;\ 6),\ (6;\ 2)\}$.

ПРИМЕР 4. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её. Промах обозначим буквой Н (неудача), попадание — буквой У (успех). Элементарные события в таком опыте имеют вид У, НУ, ННУ и т. д. Последняя буква У, поскольку стрельба оканчивается успешным выстрелом[1]. Пользуясь этими обозначениями, можно записать разные события в этом эксперименте. Например, событию A «стрелку потребуется не больше четырёх выстрелов» благоприятствуют элементарные события: У, НУ, ННУ, НННУ.

Событию B «стрелку потребуется не меньше трёх выстрелов» благоприятствует бесконечно много элементарных событий: ННУ, НННУ, ННННУ и т. д.

Можно записать: A = {У, НУ, ННУ, НННУ} и B = {ННУ, НННУ, ННННУ, ...}.

Вопросы

1 Что означает высказывание «элементарное событие благоприятствует событию A»? Сформулируйте его иначе.

2 Всякое ли элементарное событие опыта является случайным событием?

3 Верно ли, что случайному событию может благоприятствовать только одно элементарное событие?

4 Могут ли в опыте два случайных события наступить одновременно?

5 Могут ли в опыте два элементарных события наступить одновременно?

Задачи

260 Бросают одну игральную кость. Запишите событие A перечислением элементарных событий в фигурных скобках, если событие A состоит в том, что:

а) выпадет чётное число очков;
б) выпадет меньше 5 очков;
в) выпадет больше 2 очков;
г) выпадет от 2 до 5 очков.

261 Монету бросают 2 раза. Опишите словами следующие события:

а) A = {ОО, ОР}; б) B = {ОР, РО}; в) C = {РР, РО, ОР}; г) D = {ОО, РР}.

262 Шахматисты Андреев и Борисов играют между собой. Игра может окончиться победой одного из них или вничью. Известно, что Андреев не проиграл Борисову. Какие элементарные события благоприятствуют этому событию?

263 Нарисуйте в тетради таблицу элементарных событий опыта, где игральную кость бросают дважды. Закрасьте в таблице элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпадут одинаковые числа»;
б) «при каждом броске выпадет число очков, кратное трём»;
в) «сумма очков при первом и втором бросках равна 5»;
г) «произведение выпавших очков равно 10».

264 Пользуясь таблицей элементарных событий опыта с двумя бросками игральной кости, укажите элементарные события, которые благоприятствуют событию:

а) «сумма очков равна 7»;
б) «при втором броске выпадет больше очков, чем при первом»;
в) «сумма очков не меньше 6».

265 Биатлонист делает по одному выстрелу в каждую из пяти мишеней. Что является элементарным событием в этом опыте? Сколько элементарных событий благоприятствует событию: а) «биатлонист попадёт ровно в четыре мишени»; б) «биатлонист попадёт ровно в одну мишень»?

---

[1] В этом опыте можно рассматривать ещё одно элементарное событие ННН..., состоящее из бесконечного числа промахов. Но это событие мы не будем брать в расчёт, а позже докажем, что его вероятность равна нулю.

266 Симметричную монету бросают дважды. Выпадение орла при каждом бросании обозначим через О, а выпадение решки — через Р. Запишите перечислением в фигурных скобках событие:

а) «выпадет один орёл и одна решка»;

б) «во второй раз выпадет решка»;

в) «решка выпадет хотя бы один раз»;

г) «в первый раз выпадет орёл».

267 Симметричную монету бросают 3 раза. Пользуясь обозначениями О и Р, выпишите элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «выпадет ровно один орёл»;

б) «выпадет ровно одна решка»;

в) «при втором бросании выпадет решка»;

г) «при третьем бросании выпадет орёл».

268 Константин, Леонид и Михаил купили по одной порции мороженого. Всего было куплено мороженое трёх сортов: абрикосовое, брусничное и вишнёвое. Введите подходящую систему обозначений для элементарных событий такого эксперимента. Запишите все элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «Константин купил абрикосовое мороженое»;

б) «Леонид не купил брусничное мороженое»;

в) «Михаил купил либо абрикосовое, либо вишнёвое мороженое»;

г) «У Леонида ни брусничное, ни вишнёвое мороженое».

269 Стрелок в тире стреляет по мишени, пока не собьёт её. Опишите словами следующие события:

а) A = {НУ, ННУ, НННУ};

б) B = {У, НУ, ННУ, НННУ, ННННУ};

в) C = {ННУ, НННУ, ННННУ, ...} (многоточие означает, что последовательность продолжается до бесконечности);

г) D = {У, ННУ, ННННУ, ННННННУ, ...}.

270 В классе 25 учеников, среди которых учится Петя. Учитель в течение урока по очереди вызывает к доске двух человек. Сколько элементарных событий благоприятствует событию «Петю вызовут к доске»?

39 Вероятности событий

Вероятности событий мы будем обозначать буквой P латинского алфавита по начальной букве латинского слова *probabilitas*, что означает «вероятность». Например, вероятность события A обозначим $P(A)$, вероятность события B — $P(B)$ и т. п.

Правило вычисления вероятностей. Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Запишем это правило формулой. Пусть событию A благоприятствуют элементарные события a, b, c, d: $A = \{a, b, c, d\}$. Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей этих элементарных событий:

$$P(A) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d).$$

Число элементарных событий, благоприятствующих данному событию, и, следовательно, число слагаемых в правой части равенства может быть каким угодно и даже бесконечным.

Вероятности всех элементарных событий неотрицательны и в сумме равны 1. Поэтому вероятность события A также неотрицательна и не превосходит 1:

$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1.$$

В частности, вероятность невозможного события равна нулю, а вероятность достоверного — единице. Событие, которому благоприятствуют все элементарные события случайного эксперимента, является достоверным.

ПРИМЕР 1. Автомобиль подъезжает к перекрёстку (см. рис. 62 на с. 142). Предположим, что вероятность элементарного события «автомобиль повернёт направо» равна 0,5, вероятность элементарного события «автомобиль повернёт налево» равна 0,3, вероятность элементарного события «автомобиль поедет прямо» равна 0,18. Найдём вероятность события A «автомобиль не развернётся». Этому событию благоприятствуют три перечисленных элементарных события. Следовательно, $\mathrm{P}(A) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}98$.

ПРИМЕР 2. В таблице 50 сгруппированы результаты измерений роста взрослых мужчин в большой выборке. Шаг группировки — 5 см.

Возьмём одного мужчину из этой выборки и посмотрим, какому из интервалов принадлежит его рост. Это случайный опыт, в котором 12 элементарных исходов, но они не равновозможны. В качестве вероятности каждого элементарного события разумно взять частоту соответствующего интервала.

Таблица 50

Рост, см	145—149	150—154	155—159	160—164	165—169	170—174
Частота	0,002	0,011	0,030	0,068	0,155	0,189
Рост, см	175—179	180—184	185—189	190—194	195—199	200 и более
Частота	0,211	0,163	0,097	0,047	0,018	0,006

Теперь можно находить вероятности разных событий. Например, вероятность события A «рост окажется меньше, чем 160 см», равна сумме вероятностей элементарных исходов «145—149», «150—154» и «155—159»:

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}002 + 0{,}011 + 0{,}030 = 0{,}043.$$

Элементарные исходы, принадлежащие событию A, выделены в таблице 50 голубым цветом. Вероятность события A мала.

Вероятность события B «рост от 165 до 184 см» (выделены розовым цветом) равна

$$\mathrm{P}(B) = 0{,}155 + 0{,}189 + 0{,}211 + 0{,}163 = 0{,}718.$$

Событие B весьма вероятное: примерно 71,8% мужчин в данной выборке имеют рост от 165 до 184 см.

Вопросы

1 Сформулируйте правило вычисления вероятностей.

2 Бросают одну игральную кость. Событие A заключается в том, что выпадет целое (не дробное) число очков. Является ли событие A достоверным? Чему равна вероятность события A?

3 Приведите пример достоверного события в случайном эксперименте с бросанием двух игральных костей.

Задачи

271 В случайном опыте четыре элементарных события a, b, c и d, вероятности которых соответственно равны 0,1, 0,3, 0,4 и 0,2. Найдите вероятность события, которому благоприятствуют элементарные события:

а) a и c; в) b, d и c;

б) a, b и d; г) a и d.

272 В шахматной партии Андрей играет с Борисом. Вероятность выигрыша Андрея равна 0,3, вероятность ничьей равна 0,2, вероятность того, что партия не будет закончена, равна 0,1. Найдите вероятность того, что:

а) Андрей не проиграет;

б) Борис не проиграет;

в) никто не выиграет.

273 На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с вишней. Петя наугад берёт один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с вишней.

274 В таксомоторной компании в данный момент свободно 25 машин: 3 чёрных, 12 жёлтых и 10 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет зелёное такси.

275 У бабушки десять чашек: шесть с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

276 Родительский комитет закупил 25 пазлов для подарков детям на Новый год. Пазлы с разными рисунками: 12 с автомобилями и 13 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом между 25 детьми, среди которых есть Коля. Найдите вероятность того, что Коле достанется пазл с автомобилем.

277 В лыжных гонках участвуют 13 спортсменов из России, 2 спортсмена из Норвегии и 5 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

278 В магазине канцтоваров в продаже 100 ручек: 23 красных, 12 зелёных, 17 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или чёрной.

279 В девятом классе учатся 11 мальчиков и 9 девочек. По жребию они выбирают одного дежурного по классу. Какова вероятность того, что это будет мальчик?

280 Симметричную монету бросают 2 раза. Найдите вероятность события:

а) «решка выпадет хотя бы один раз»;

б) «в первый раз выпадет орёл».

281 Игральную кость бросают дважды. С помощью таблицы этого эксперимента (см. с. 137, рис. 61) найдите количество благоприятствующих элементарных событий и вероятность события:

а) «сумма выпавших очков равна 6»;

б) «сумма выпавших очков больше чем 5»;

в) «при первом броске выпадет больше очков, чем при втором»;

г) «количество очков, выпавших в первый раз, и количество очков, выпавших во второй раз, различаются на 4».

282 Стрелок один раз стреляет в круглую мишень (рис. 65). Вероятности попадания в зоны мишени показаны в таблице 51. Число очков, которое получает стрелок, равно номеру зоны.

Таблица 51. **Вероятности попадания в зоны мишени**

Зона	1	2	3	4	5
Вероятность	0,001	0,002	0,004	0,006	0,021
Зона	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вероятность	0,065	0,138	0,243	0,334	0,186

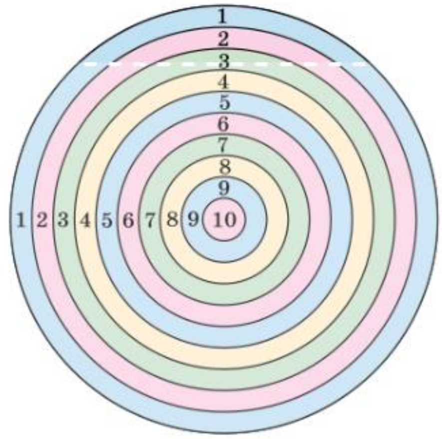


Рисунок 65

Найдите вероятность события:

а) «стрелок получит меньше 5 очков»;

б) «стрелок получит больше 7 очков»;

в) «стрелок попадёт в жёлтую зону»;

г) «стрелок не попадёт в голубую зону».

283 В некотором опыте возможно три элементарных события: a, b и c. Вероятность того, что наступит либо событие b, либо событие c, равна 0,83. Найдите вероятность элементарного события a.

284 В некотором опыте возможно три элементарных события: a, b и c. Вероятность того, что наступит либо событие a, либо событие b, равна 0,4; вероятность того, что наступит либо событие a, либо событие c, равна 0,7. Найдите вероятность каждого из элементарных событий.

40 Опыты с равновозможными элементарными событиями

Напомним, что если в случайном опыте N элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N}$ (см. п. 37).

Это обстоятельство позволяет легко находить вероятности всевозможных событий в таком опыте.

ПРИМЕР 1. Игральную кость бросают 2 раза. Найдём вероятность события A «сумма очков меньше 6». Для этого воспользуемся таблицей элементарных событий этого эксперимента (рис. 66) и выделим красными крестиками элементарные события, благоприятствующие событию A.

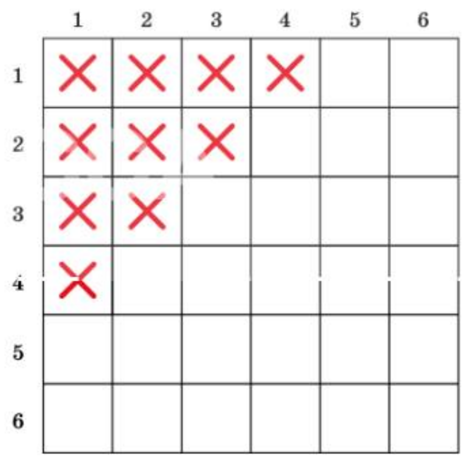


Рисунок 66

Обозначим через $N(A)$ число элементарных событий, благоприятствующих событию A. Таких элементарных событий десять: $N(A) = 10$. Общее число элементарных событий $N = 36$, а вероятность каждого из них равна $\frac{1}{N} = \frac{1}{36}$.

Поэтому вероятность события A равна

$$\mathrm{P}(A) = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}}_{N(A)\,\text{слагаемых}} = \frac{N(A)}{N} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

На этом примере мы получили общую формулу и соответствующее правило.

Правило. Если в случайном опыте конечное число элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность события A равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных событий:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

ПРИМЕР 2. Дважды бросают симметричную монету. Найдём вероятность того, что оба раза выпадет одна и та же сторона.

Выпишем все элементарные события опыта:

ОО, ОР, РО и РР.

Всего элементарных событий четыре: $N = 4$. Так как монета симметричная, элементарные события равновозможны. Из них ровно два события, ОО и РР, благоприятствуют событию B «оба раза выпадет одна сторона»: $N(B) = 2$. Запишем кратко решение задачи: $N = 4$, $N(B) = 2$, следовательно,

$$\mathrm{P}(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Вопросы

1 Сформулируйте правило вычисления вероятности случайного события в опыте с равновозможными элементарными событиями.

2 Запишите это правило формулой.

Задачи

285 Бросают одну игральную кость. Найдите вероятность события:
а) «выпадет чётное число очков»;
б) «выпадет число очков, кратное 3»;
в) «выпадет больше 3 очков»;
г) «выпадет число очков, кратное 7».

286 Бросают одну игральную кость. Вычислите вероятность события:
а) «выпавшее число очков является делителем числа 12»;
б) «выпавшее число очков кратно 5»;
в) «выпадет больше 2 очков»;
г) «выпадет больше 1, но меньше 6 очков».

287 Бросают симметричную монету 2 раза. Равны ли вероятности событий A «два раза выпадет орёл» и B «один раз выпадет орёл, а другой раз — решка»? Найдите вероятности этих событий.

288 Бросают две игральные кости: жёлтую и зелёную. Вычислите вероятность события:

а) «сумма очков на обеих костях равна 7»;

б) «сумма очков на обеих костях равна 11»;

в) «на жёлтой кости выпало больше очков, чем на зелёной»;

г) «числа очков на костях различаются не больше чем на 2».

289 В магазине в коробке 24 одинаковые авторучки. Из них 13 авторучек красные, 5 — зелёные, остальные — синие. Продавец наудачу достаёт одну авторучку. Найдите вероятность того, что извлечённая ручка:

а) красная;

б) не зелёная;

в) либо синяя, либо зелёная;

г) либо красная, либо синяя.

290 В ящике 20 синих и 16 красных карандашей. Продавец не глядя вынимает один карандаш. Найдите вероятность того, что этот карандаш окажется:

а) синим; б) красным.

291 Миша покупает альбом (А), блокнот (Б) и тетрадь (Т). Продавец достаёт эти товары в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что:

а) сначала продавец достанет блокнот;

б) продавец достанет альбом в последнюю очередь;

в) продавец сначала достанет тетрадь, а в последнюю очередь — блокнот;

г) альбом будет извлечён раньше, чем тетрадь.

292 На соревнования приехали гимнастки из трёх стран. Из России 7 гимнасток, из Германии — 8, из Чехии — 5. Порядок выступлений гимнасток определяется жребием. Найдите вероятность того, что:

а) первой будет выступать гимнастка из России;

б) третьим по счёту будет выступление какой-нибудь гимнастки из Германии;

в) второй по счёту будет выступать гимнастка из России или Чехии;

г) последней будет выступать спортсменка, приехавшая не из Чехии.

293 На день рождения к Паше пришли две Маши и два Саши. Все пятеро расселись за круглым столом. Найдите вероятность того, что Паша сидит между двумя тёзками.

294 Шахматный слон может за один ход перейти на любое число полей, двигаясь только по диагонали (рис. 67). Шахматный слон случайным образом поставлен на доску. Найдите вероятность того, что он может за один ход перейти на поле:

а) h1; в) c4; д) d5;

б) a5; г) d7; е) g3.

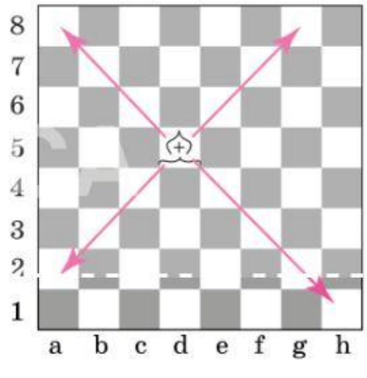


Рисунок 67

295 Одно время на улицах и вокзалах профессиональные игроки предлагали прохожим испытать удачу в простой игре. Зажав в кулаке обычный носовой платок так, что наружу высовывались только четыре уголка, игрок предлагал прохожему взять два любых конца и потянуть за них. Если прохожий вытаскивал два соседних уголка, то он проигрывал. Если прохожий вытаскивал два противоположных уголка, то он выигрывал. Найдите вероятность выигрыша прохожего.

296 По правилам игры «Морской бой» на поле 10 × 10 клеток размещаются четыре однопалубных корабля (по одной клетке), три двухпалубных, два трёхпалубных и один четырёхпалубный (рис. 68). Игрок делает первый случайный выстрел. Найдите вероятность того, что он:

а) попадёт в однопалубный корабль противника;

б) попадёт в трёхпалубный корабль;

в) попадёт в какой-нибудь из кораблей противника;

г) не попадёт ни в какой корабль.

297 При игре в «Морской бой» после первого вашего выстрела противник сообщил, что вы подбили какой-то корабль (но не потопили его). Какова вероятность того, что вы попали:

а) в четырёхпалубный корабль;

б) в трёхпалубный корабль;

в) в двухпалубный корабль?

298 На рисунке 69 показано положение в игре «Морской бой». Красным цветом показаны потопленные корабли противника. У противника остался только один двухпалубный корабль, положение которого неизвестно. Клетки, в которых нарисованы точки, — это клетки, по которым мы уже стреляли. В них не может быть корабля. Считая равновозможными любые допустимые положения последнего корабля, найдите вероятность того, что мы попадём в него, выстрелив в поле:

а) к4; б) з1; в) к1; г) е7; д) е8.

В какое поле нужно выстрелить, чтобы вероятность подбить последний корабль была наибольшей?

299 У Андрея в правом кармане брюк шесть монет — две из них по 10 р., а четыре монеты по 2 р. На ощупь монеты неразличимы. Андрей достаёт из правого кармана три случайно выбранные монеты и перекладывает их в левый карман. Найдите вероятность того, что обе 10-рублёвые монеты окажутся:

а) в одном кармане;

б) в левом кармане.

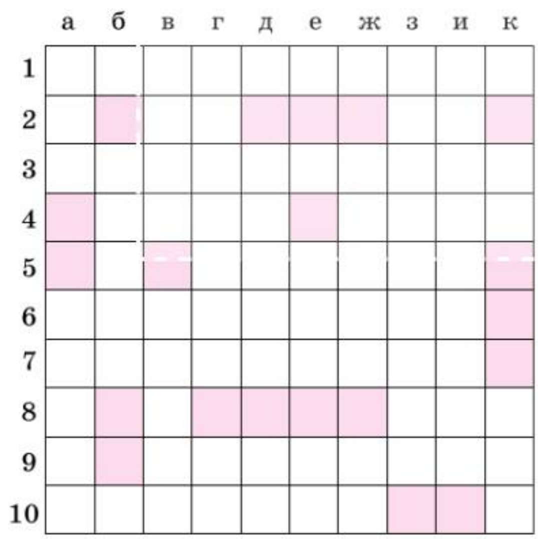


Рисунок 68

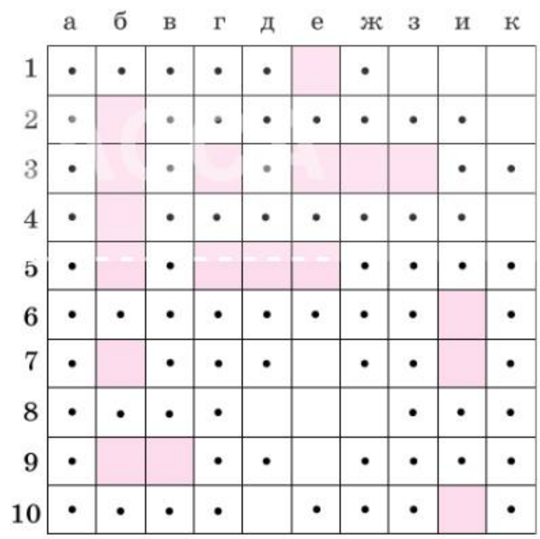


Рисунок 69

300 В городе N пять улиц. При этом две из них идут параллельно друг другу с севера на юг, а остальные проходят параллельно друг другу с запада на восток. Любые две улицы разных направлений пересекаются. Утром двое постовых случайным образом встали на два разных перекрёстка. Найдите вероятность того, что они стоят на одной улице.

41 Случайный выбор

В задачах предыдущего параграфа мы имели дело со случайным выбором одного случайного предмета из нескольких (ручки из коробки, поля на шахматной доске и т. п.). Это **выбор наудачу** или **случайный выбор**, то есть выбор без каких-либо предпочтений. Случайный выбор входит как часть во многие игры: наудачу выбирают номер при игре в лото; наудачу выбирают карты во многих карточных играх; в лотереях наудачу выбирают номера выигрышных билетов и т. д.

В **социологических исследованиях** случайный выбор используется для формирования группы опрашиваемых людей. При контроле качества продукции также используется выбор наудачу, чтобы сократить расходы на контроль. Случайный выбор очень важен при испытаниях новых лекарств и выяснении, насколько они эффективны и какие побочные эффекты могут дать.

Случайный выбор — это разновидность случайного опыта с равновозможными элементарными событиями. Элементарным событием в таком опыте является извлечение одного или нескольких предметов из изучаемой группы. Такая изучаемая группа, из которой выбираются предметы, элементы или люди для опроса или испытаний, называется **совокупностью** или **генеральной совокупностью**.

После выбора одного предмета случайный выбор можно продолжить: из всей совокупности или только из оставшихся предметов выбрать ещё один, затем ещё один и т. д. Собранное таким способом множество называют **случайной выборкой** из совокупности. Численность выборки обычно назначают заранее.

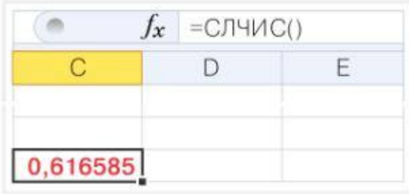
Случайную выборку можно получить иначе: сразу выбрать из общей совокупности нужное число предметов. Два карандаша из пяти можно выбирать один за другим, а можно взять два случайных карандаша сразу. Примечательно, что в обоих случаях вероятность выбора каких-нибудь двух определённых карандашей одна и та же.

Организовать по-настоящему случайный выбор непросто. Для этого требуются специальные методы: нужно бросать жребий, использовать таблицы случайных чисел и т. д. При разработке шифровальных алгоритмов ещё не так давно использовали телефонные книги абонентов большого города или страны: последние несколько цифр в телефонных номерах абонентов можно считать случайными. В других случаях использовался случайный шум разрядов атмосферного электричества — это помехи, которые мы слышим в радиоприёмнике. В настоящее время чаще всего для создания случайных последовательностей используются генераторы случайных чисел.

Если выбор поручить человеку, то выбор не окажется случайным. Многочисленные опыты показали, что равномерного распределения шансов при этом не получается. Например, если учитель пытается по своему разумению осуществить случайный выбор ученика из списка класса, то чаще всего шансы учеников, стоящих первыми и последними в этом списке, будут ниже, чем у остальных.

В электронных таблицах для получения случайного числа на интервале от 0 до 1 используется функция

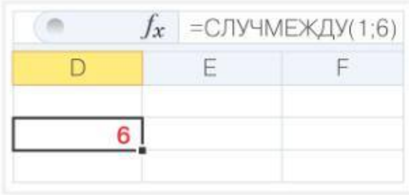
СЛЧИС()



Есть другая функция для случайного выбора:

СЛУЧМЕЖДУ()

Эта функция выбирает целое случайное число на указанном отрезке натурального ряда. На рисунке показано, как в электронной таблице можно имитировать бросание игральной кости.



Вопросы

1 Приведите примеры исследований, которые проводят с помощью случайных выборок.

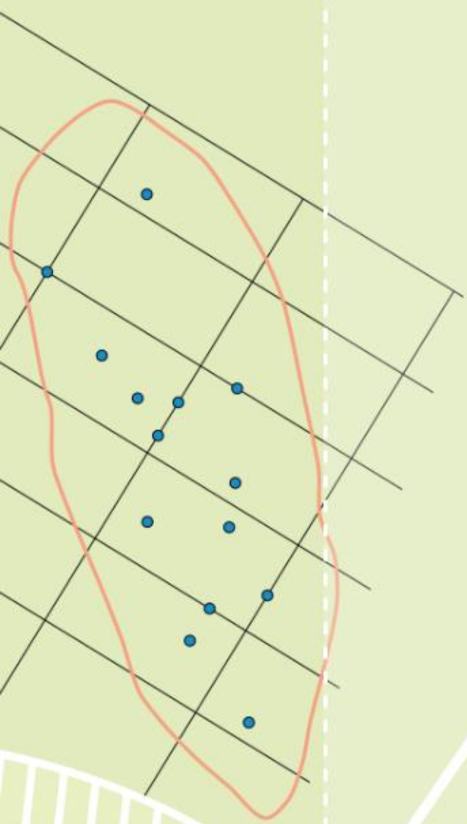
2 Бросают правильную игральную кость. Можно ли считать такой способ случайным выбором одной из её граней?

3 Бросают правильную монету. Можно ли считать такой способ случайным выбором одной из её сторон?

4 Является ли выбор самого высокого ученика в классе случайным?

5 Зачем для формирования выборки нужны специальные методы?

IX Рассеивание данных



Занимаясь описательной статистикой, мы говорили о среднем значении, медиане, наибольшем и наименьшем значениях. Эти характеристики описывают положение массива данных на числовой прямой. Для более полного описания данных нужно уметь измерять рассеивание данных относительно своего среднего.

Чаще всего для описания и измерения рассеивания используются дисперсия и стандартное отклонение. Для графического изображения рассеивания применяются специальные диаграммы, их так и называют — диаграммы рассеивания.

42 **Рассеивание числовых данных и отклонения**

43 **Дисперсия числового набора**

44* **Стандартное отклонение числового набора**

45* **Диаграммы рассеивания**

В отличие от среднего или медианы, которые показывают, где именно расположены данные, как они велики или малы, меры **рассеивания** показывают, насколько далеко значения массива отклоняются от его центра.

Мы уже обсуждали размах: разность между наибольшим и наименьшим значениями. Размах легко найти, но у него есть серьёзный недостаток: он опирается только на наименьшее и наибольшее значения, которые могут быть нетипичными или даже ошибочными. Для того чтобы лучше описать рассеивание данных, обычно используются другие меры — **дисперсия** и **стандартное отклонение**.

42 Рассеивание числовых данных и отклонения

На рисунке 70 схематично показаны два числовых набора. У них примерно одинаковое среднее значение. Однако сгруппированы значения по-разному. У первого набора значения «тяготеют» к краям промежутка значений. Только две точки находятся где-то посередине.

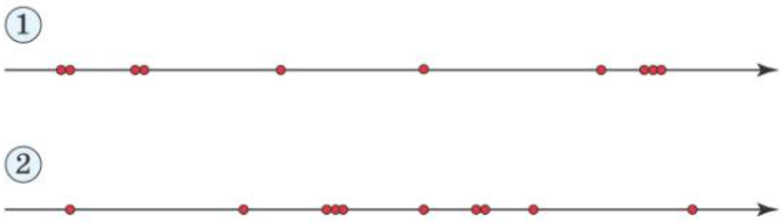


Рисунок 70. **Два числовых набора на координатной прямой**

Напротив, во втором наборе почти все точки группируются вблизи середины промежутка и только две расположены по краям. Эти два набора отличаются рассеиванием. Если данные сильно рассеяны, то многие значения удалены от среднего. Напротив, при малом рассеивании большинство значений расположено близко друг к другу и к среднему. В этом случае изменчивость небольшая. Рассеивание — это свойство числовых массивов, и оно нуждается в математическом описании.

ПРИМЕР 1. Сергей и Иван живут в одном доме и учатся в одной школе. Занятия в школе начинаются в 8:30 утра. Каждое утро Сергей выходит из дома ровно в 7:55 и идёт в школу пешком. Иван каждое утро выходит ровно в 8:00 и идёт к остановке автобуса. На автобусе до школы всего одна остановка. В таблице 52 показано время, когда Иван и Сергей входили в школу. Выборка сделана в разные случайные дни.

Сергей тратит на дорогу до школы всегда примерно одно и то же время — около 20 мин. Если посчитать по имеющимся данным, сколько времени в среднем на до-

Таблица 52. **Время прихода в школу**

Сергей	8:15	8:14	8:14	8:15	8:16	8:15	8:25	8:15	8:14	8:16
Иван	8:11	8:19	8:27	8:12	8:35	8:17	8:22	8:13	8:18	8:23

рогу тратит Иван, то получится около 15 мин. Бывает, что Иван добирается до школы быстро — его лучшее время 11 мин. Но случается, что он опаздывает или почти опаздывает на первый урок.

Мы без вычислений видим, что рассеивание данных во втором наборе больше. Почему так получается? Время, которое тратит на дорогу Иван, складывается из нескольких случайных слагаемых. Среди них есть два очень изменчивых: время ожидания автобуса на остановке и время, которое тратит автобус на то, чтобы проехать одну остановку. Если автобус почему-то задерживается или стоит в пробке, то Иван рискует опоздать.

Сергей не пользуется автобусом. Время, которое он тратит на дорогу, зависит только от скорости ходьбы. Она примерно одинакова во все дни: значительно ниже только в гололёд. Только один раз Сергей пришёл в школу позже обычного. Может быть, он встретил по дороге что-то интересное и задержался.

Для измерения рассеивания, конечно, можно использовать размах. Размах времени, которое занимает дорога в школу, у Сергея 11 мин, а у Ивана — 24 мин.

Но размах — не самая лучшая мера рассеивания. Посмотрите на два набора на рисунке 70. Мы видим, что у первого набора рассеивание больше, но размах у этих двух наборов практически одинаковый. Так получается потому, что размах учитывает лишь два значения — наибольшее и наименьшее, которые, как мы знаем, могут оказаться нетипичными. Именно это происходит в примере на рисунке 70.

Что делать? Нужно поискать другие меры рассеивания, которые учитывают все значения в данном массиве и поэтому меньше подвержены влиянию отдельных значений, чем размах.

Посмотрим сначала, как далеко разные значения в массиве данных отстоят от среднего. Иными словами, нужно изучить **отклонения от средних значений**.

Отклонения

Поставим вопрос о том, как числа набора данных расположены по отношению к своему среднему арифметическому. Зная только размах, мы не можем судить об этом. Полную информацию даёт набор **отклонений**.

> В массиве чисел **отклонением числа от среднего арифметического** или просто **отклонением** называется разность между этим числом и средним арифметическим набора.

ПРИМЕР 2. На рисунке 71 изображён набор чисел: 1, 4, 5, 9, 12. Среднее арифметическое равно 6,2. Отклонение числа 9 от среднего равно $9 - 6{,}2 = +2{,}8$. Знак «+» можно не писать, но мы написали его, чтобы подчеркнуть, что отклонение положительно. Число 5 на прямой расположено левее среднего арифметического. Это значит, что его отклонение отрицательно: $5 - 6{,}2 = -1{,}2$.

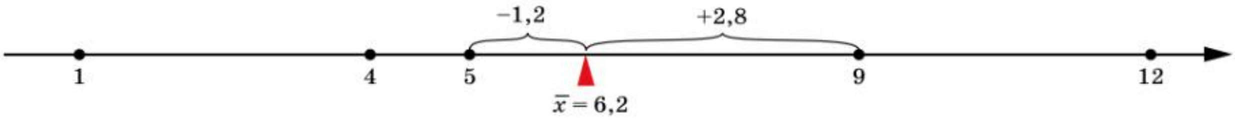


Рисунок 71. **Отклонения на числовой прямой**

ПРИМЕР 3. Для примера возьмём набор: 1, 6, 7, 9, 12. Среднее арифметическое этого набора равно 7. Найдём отклонение каждого числа от среднего:

$$1 - 7 = -6, \quad 6 - 7 = -1, \quad 7 - 7 = 0, \quad 9 - 7 = 2, \quad 12 - 7 = 5.$$

Если число меньше среднего, то его отклонение отрицательно, если число больше среднего, то его отклонение положительно. В одном случае — для числа 7, которое совпало со средним арифметическим, — отклонение равно нулю.

Если не все числа в наборе совпадают друг с другом, то часть отклонений положительна, а часть — отрицательна. При этом сумма всех отклонений у любого набора равна 0. Убедимся в этом на нашем примере:

$$-6 - 1 + 0 + 2 + 5 = 0.$$

Свойство отклонений. Сумма отклонений от среднего арифметического равна нулю.

Это свойство удобно использовать для самопроверки при вычислении отклонений.

Абсолютные отклонения

Чаще важны не сами отклонения, а их модули, то есть абсолютные значения.

Модуль отклонения называют **абсолютным отклонением**.

Абсолютное отклонение показывает, как далеко число отстоит от среднего арифметического, но не показывает, в какую сторону — вправо или влево.

ПРИМЕР 4. Среднее арифметическое числового набора 10, 4, 1, 8, 2 равно 5. Число 2 левее числа 5 на 3 единицы, а число 8 правее числа 5 на 3 единицы. Следовательно, абсолютные отклонения у этих чисел одинаковы:

$$|2 - 5| = 3 \text{ и } |8 - 5| = 3.$$

По абсолютным отклонениям можно судить о том, велико ли рассеивание чисел на числовой прямой. Чем меньше в целом абсолютные отклонения в среднем, тем меньше рассеяны значения в наборе. На рисунке 72 изображены два числовых набора. Определите, в каком из этих наборов отклонения в среднем больше.

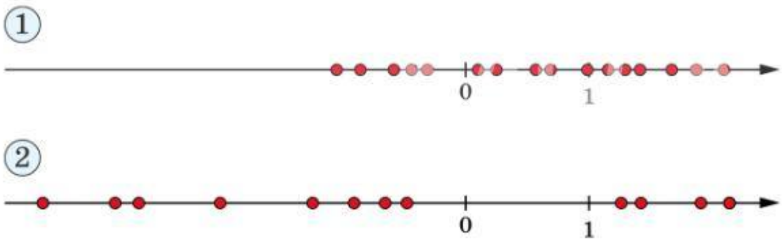


Рисунок 72. **Два набора с разным рассеиванием**

Вопросы

1 Представьте, что вы живёте в том же доме, где живут Сергей и Иван, и учитесь в той же школе, что и они (см. пример 1). Как бы вы добирались до школы — пешком или на автобусе? Что для вас важнее — не опаздывать или сэкономить в среднем 5 мин на дорогу?

2 Чему равна сумма всех отклонений чисел набора от их среднего арифметического?

3 Чему равно среднее арифметическое всех отклонений от среднего арифметического в наборе?

4 Что такое абсолютное отклонение?

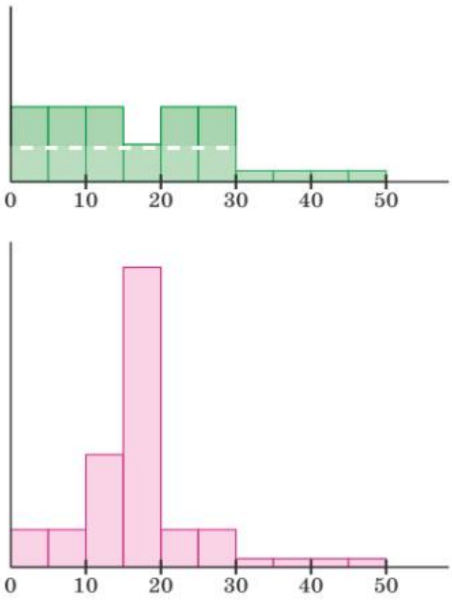


Рисунок 73

Задачи

301 Даны два числовых набора. Нанесите их на числовую прямую или изобразите на диаграмме. Сравните рассеивания этих двух наборов. У какого из них рассеивание больше?

а) 1, 3, 2, 1, 3, 2, 3 и 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6;

б) 1, 3, 2, 1, 3, 2, 3 и 2, 4, 5, 5, 6, 6, 8;

в) 1, 3, 2, 1, 3, 2, 3 и 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9.

302 Даны гистограммы двух числовых наборов, в которых чисел поровну (рис. 73). Сравните рассеивания этих двух наборов. У какого из них рассеивание больше?

303 На рисунке 74 изображены два числовых набора на координатной прямой. У какого из них, на ваш взгляд, рассеивание больше?

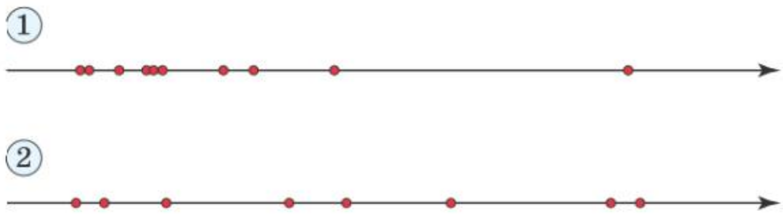


Рисунок 74

304 Рассмотрите таблицу 52 (с. 156) «Время прихода в школу». Чтобы вовремя приготовиться к уроку, нужно прийти в школу не позже, чем в 8:20. Какова примерно доля случаев, когда:

а) Сергей вовремя готов к уроку;

б) Иван вовремя готов к уроку?

305 Найдите отклонения от среднего арифметического чисел набора:

а) 1, –2, 3, 4, 1, 2;

б) –2,5, 3,1, 5,3, –1,3, 4,8.

306 Дан некоторый числовой набор. Известно, что сумма отклонений от среднего всех чисел, кроме последнего, равна:

а) 57; б) –4,37.

Найдите отклонение последнего числа.

307 Могут ли все отклонения некоторого набора от среднего арифметического:

а) быть положительными;

б) быть отрицательными;

в) равняться нулю?

Если не могут, объясните почему. Если могут, приведите пример.

308 Для числового набора 1, 2, 2, 0, 4, 3 найдите:

а) сумму модулей всех отклонений;

б) сумму квадратов всех отклонений.

309 Для данного числового набора найдите абсолютные отклонения чисел:

а) 1, 5, 3, 5, 2; б) 8,4, 4,5, 6,7, 4,4.

310 Дан числовой набор. Найдите в этом наборе два числа, которые имеют одинаковое абсолютное отклонение от среднего арифметического.

а) 3, 6, 4, 1, 8, 2; б) 12, 9, 8, 11, 2, 4, 3.

311 Докажите свойство отклонений от среднего арифметического. Пусть дан набор чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n, и их среднее арифметическое равно $\bar{x}$. Покажите, что сумма всех отклонений равна нулю:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = 0.$$

43 Дисперсия числового набора

Наиболее полной характеристикой рассеивания чисел в массиве данных является набор их отклонений. Но когда набор велик, рассматривать все отклонения неудобно. Нужно взять какое-то среднее отклонение. Но среднее арифметическое отклонений не годится, поскольку оно у любого набора равно нулю.

Чтобы судить о рассеивании, принято усреднять квадраты отклонений. Квадраты отклонений неотрицательны. Чем больше отклонения по модулю, тем больше будет средний квадрат отклонений. Эту величину называют дисперсией[1].

Среднее арифметическое квадратов отклонений чисел от их среднего арифметического называется **дисперсией** набора чисел.
Обычно говорят короче: **дисперсия** — это средний квадрат отклонений.

ПРИМЕР 1. Найдём дисперсию числового набора: 4, 3, 0, 5. Поместим числа в первый столбец таблицы 53. В нижнюю ячейку запишем их среднее арифметическое.

Таблица 53. **Вычисление дисперсии**

Значение	Отклонение	Квадрат отклонения
4	$4 - 3 = 1$	$1^2 = 1$
3	$3 - 3 = 0$	$0^2 = 0$
0	$0 - 3 = -3$	$(-3)^2 = 9$
5	$5 - 3 = 2$	$2^2 = 4$
Среднее: $\bar{x} = 3$	Сумма: 0	Дисперсия: $\dfrac{1+0+9+4}{4} = 3{,}5$

Во второй столбец запишем отклонения. Чтобы проверить себя, подсчитаем сумму отклонений. Она должна равняться нулю. В третий столбец таблицы поместим квадраты отклонений. В нижней ячейке вычислим дисперсию, усреднив числа третьего столбца.

[1] От латинского слова *dispersio* — «рассеивание, разброс».

ПРИМЕР 2. Возьмём другой набор: 3, 3, 2, 4. Сравним этот набор с набором из примера 1. Среднее значение также равно 3. Но дисперсия другая — она равна 0,5 (проверьте, проделав вычисления так же, как в примере 1).

Числа во втором наборе расположены кучнее — ближе друг к другу и к среднему значению 3, чем числа в первом наборе. Поэтому дисперсия второго набора меньше.

ПРИМЕР 3. Тип климата определяется на основе разных показателей. Главный показатель — дисперсия средних месячных температур. Дисперсия температур в приморских местностях невысокая (**морской климат**), **умеренный климат** характеризуется более высокой дисперсией месячных температур, а **континентальный климат** — очень высокой. В районах с континентальным климатом жаркое лето и очень холодная зима.

С помощью дисперсии различия между двумя видами климата можно выразить количественно. Сравним изменение температур в течение года в Москве и Пензе, где климат умеренный, с изменением температур в Новосибирске и Хабаровске, где климат континентальный. В таблице 54 приведена средняя месячная температура за 80 лет в Москве, Пензе, Новосибирске и Хабаровске.

Таблица 54. **Средняя месячная температура, °C**

Месяц	Москва	Пенза	Новосибирск	Хабаровск
Январь	–9,3	–8,2	–19,0	–22,3
Февраль	–8,6	–6,6	–17,2	–17,2
Март	–3,4	–1,9	–10,7	–8,5
Апрель	5,1	6,7	–0,1	3,1
Май	12,4	15,3	10,0	11,1
Июнь	16,7	18,3	16,3	17,4
Июль	18,4	20,0	18,7	21,1
Август	16,6	19,0	16,0	20,0
Сентябрь	10,9	12,4	9,9	13,9
Октябрь	4,4	5,7	1,5	4,7
Ноябрь	–2,0	–1,7	–9,7	–8,1
Декабрь	–6,8	–5,9	–16,9	–18,5
Среднее за год, °C	4,5	6,1	–0,1	–1,4
Дисперсия, °C^2	98,9	105,7	185,2	228,8

Средняя температура связана с широтой местности: чем севернее, тем ниже средняя годовая температура. Дисперсии температур различаются очень сильно. Для Москвы и Пензы они составляют 98,9 и 105,7 соответственно, для Новосибирска и Хабаровска — 185,2 и 228,8 соответственно. Единица измерения дисперсии в данном случае — градус Цельсия в квадрате.

Обозначения и формулы

Дисперсию числового набора X будем обозначать S^2. Символ возведения в квадрат подчёркивает, что дисперсия является многочленом второй степени от величин

$x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если нужно указать, что дисперсия относится к набору X, будем писать S_X^2. Запишем формулу дисперсии:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}.$$

Может показаться, что дисперсию трудно вычислять. Но нам не приходится находить дисперсию вручную: в калькуляторах и в электронных таблицах есть специальные функции, которые делают это мгновенно.

Кроме того, у дисперсии есть свойства, которые позволяют упростить вычисления. Например, есть более простая формула для дисперсии: $S^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

Чтобы понять эту формулу, вспомним, что с помощью надчёркивания мы обозначаем среднее арифметическое. Символ $\overline{x^2}$ означает средний квадрат, для вычисления которого нужно сначала все значения набора возвести в квадрат, а затем найти среднее арифметическое получившихся квадратов. Символ $\overline{x}^2$ означает квадрат среднего значения, для вычисления которого сначала нужно найти среднее арифметическое данных, а потом возвести его в квадрат.

Формулу $S^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ можно прочитать так: «дисперсия равна среднему квадрату без квадрата среднего».

ПРИМЕР 4. Возьмём числа из примера 1 и найдём дисперсию по формуле $S^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$. Таблица становится короче, а вычислений теперь меньше (табл. 55).

Таблица 55. **Вычисление дисперсии**

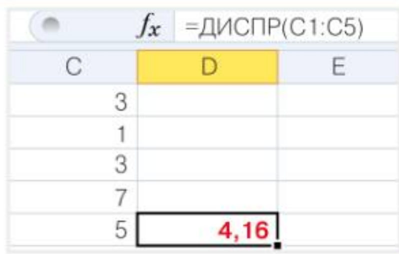
Значение	Квадрат значения
4	16
3	9
0	0
5	25
Среднее: $\overline{x} = 3$	Среднее: $\overline{x^2} = 12{,}5$

Значит, дисперсия равна

$$S^2 = 12{,}5 - 3^2 = 12{,}5 - 9 = 3{,}5.$$

Для вычисления дисперсии числового массива в электронной таблице используйте функцию

ДИСПР() или ДИСП.Г()



Вопросы

1 Почему размах не всегда является подходящей характеристикой для описания рассеивания значений в наборе данных?

2 Дайте определение дисперсии.

3 Даны два набора из трёх чисел: 1, 2, 3 и 2, 4, 6. Без вычислений определите, у какого из этих наборов дисперсия меньше.

4 Как дисперсия средних месячных температур в некоторой местности характеризует климат этой местности?

5 Может ли дисперсия числового набора быть отрицательной?

Задачи

312 Для данных числовых наборов составьте таблицу отклонений от среднего и квадратов отклонений от среднего и найдите дисперсию:

а) -1, 0, 4;

б) 2, 3, 7;

в) -3, 1, 2, 4;

г) 2, 6, 7, 5;

д) -2, -1, 1, 2, 5;

е) -1, -3, -2, 3, 3.

313 Даны два набора чисел. Отметьте их на числовой прямой. Вычислите дисперсию каждого из этих наборов. Дисперсия какого набора больше?

а) 2, 3, 7 и 1, 2, 3;

б) 2, 3, 4, 7 и 1, 5, 6, 8.

314 Сумма двадцати чисел равна 96, а сумма их квадратов равна 478. Найдите дисперсию этого числового набора.

315 Даны два набора чисел. Отметьте числа на числовой прямой. Определите на глаз, у какого из наборов рассеивание значений больше. Проверьте ваш глазомер, вычислив и сравнив дисперсии наборов.

а) 2, 3, 4 и 6, 7, 8;

б) 3, 5, 7, 9 и 12, 14, 16, 18.

316 Анна и Инна тренируются в стрельбе из лука. За один подход каждая делает пять выстрелов: по одному по каждой из пяти мишеней. Результаты 30 подходов собраны в таблицу 56. Найдите среднее и дисперсию результатов каждой девушки. Какой вывод можно сделать по этим данным?

Таблица 56

Число поражённых мишеней	0	1	2	3	4	5
Результат Анны	2	15	6	5	1	1
Результат Инны	4	23	2	1	0	0

317 В классе поровну юношей и девушек. Средний рост девушек — 166,3 см, а дисперсия роста для девушек — 8,5 см^2. Средний рост юношей равен 177,6 см, а дисперсия равна 9,6 см^2. Найдите средний рост и дисперсию роста всех учеников в классе. Средний рост округлите до десятых, а дисперсию до сотых.

44* Стандартное отклонение числового набора

Дисперсия — удобная мера рассеивания. Но всё же у неё есть серьёзный недостаток, который затрудняет её практическое применение. Дело в единицах измерения. Если дан массив расстояний в метрах, то среднее арифметическое, медиана и другие центральные меры тоже будут измеряться в метрах. А вот дисперсия — многочлен второй степени. Поэтому дисперсия будет измеряться в квадратных метрах.

В таблице 54 (с. 161) мы нашли дисперсии средних месячных температур. Обратите внимание на последнюю строчку таблицы: дисперсия измеряется в квадратных градусах. Это звучит курьёзно, но так и есть.

Чтобы избавиться от этого недостатка, нужно извлечь из дисперсии квадратный корень. Получается **стандартное отклонение**.

Стандартным отклонением числового массива называется квадратный корень из дисперсии этого массива.

Формула стандартного отклонения:

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}} \text{ или } S = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

Стандартное отклонение — некоторое среднее[1] отклонение чисел набора.

ПРИМЕР 1. В предыдущем параграфе мы нашли дисперсию числового набора 4, 3, 0, 5. Она равна 3,5. Следовательно, стандартное отклонение этого набора равно $\sqrt{3{,}5} \approx 1{,}87$.

Посмотрим, как расположены числа на числовой прямой. Отметим на этой же прямой среднее арифметическое $\overline{x}$ и отложим от него справа и слева одно стандартное отклонение S.

Рисунок 75. **Числовой набор, среднее и стандартное отклонения**

Точками на рисунке 75 показаны числа набора, синяя линия — отрезок $[\overline{x} - S; \overline{x} + S]$. В данном случае получился отрезок [1,13; 4,87]. Некоторые точки оказались внутри этого отрезка, а другие — снаружи.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим данные о населении городов Подмосковья (см. табл. 43 на с. 67—68). Удалим два очень больших и одно очень маленькое значения (население городов Балашихи, Подольска и Вереи). Найдём среднее и стандартное отклонение после удаления этих трёх городов: $\overline{x} = 67{,}7$ тыс. чел., $S = 57{,}2$ тыс. чел. Если отступить на одно стандартное отклонение от среднего влево и вправо, получится отрезок от 10,6 до 124,9 тыс. чел.

[1] Это среднее не является средним арифметическим. Квадратный корень из среднего квадрата называют средним квадратичным. Таким образом, стандартное отклонение — это среднее квадратичное отклонение от среднего арифметического.

Если население города попадает в этот отрезок, можно считать такой город типичным по численности населения. Города, население которых меньше 10,6 тыс. жителей, можно считать малыми, а города, где больше 124,9 тыс. жителей, можно считать крупными городами. Тем самым мы выбрали **решающее правило**, позволяющее определить, что такое малый и что такое крупный подмосковный город. Это правило основано на одном стандартном отклонении от среднего значения.

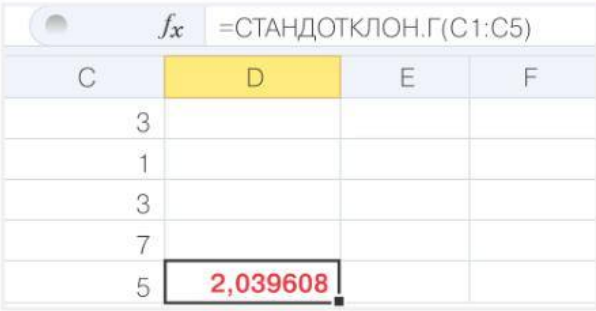
Решающие правила можно выбирать разными способами. Можно опираться не на одно, а на полтора, два или три стандартных отклонения. Существуют и другие способы.

Чтобы найти стандартное отклонение в электронной таблице, можно извлечь корень из дисперсии:

КОРЕНЬ(ДИСПР( ))

Но в современных редакторах есть специальная функция

СТАНДОТКЛОН.Г()



Стандартное отклонение играет большую роль в массовом производстве. Значительный износ оборудования приводит к большому рассеиванию параметров готовой продукции. Следовательно, измерение рассеивания во время контроля качества продукции позволяет косвенно судить о состоянии оборудования.

ПРИМЕР 3. На хлебозаводе производится контрольное взвешивание испечённых булок номинальной массой 200 г. В таблице 57 показаны результаты взвешивания двух партий, полученных на двух одинаковых производственных линиях.

Масса готовой булки зависит от количества теста, которое отмерил дозирующий автомат. В первой партии среднее отклонение от номинального значения равно 6,1 г, во второй партии — только 1,4 г. Казалось бы, первая линия работает лучше. Но посмотрим на стандартное отклонение: в партии продукции, взятой со второй линии, оно равно 4,18 г, а в первой партии — только 1,3 г.

Это означает, что вторая линия изношена, возможно, ей нужен ремонт. А первая линия требует лишь небольшой регулировки, чтобы дозатор отмерял примерно на 6—7 г теста больше, чем сейчас.

Таблица 57. **Контрольное взвешивание двух партий**

Номер пробы	**Масса булки, г**	
	Линия 1	**Линия 2**
1	193	195
2	195	191
3	195	201
4	194	197
5	192	204
6	194	202
7	196	196
8	195	196
9	193	205
10	192	199
Среднее арифметическое	193,9	198,6
Стандартное отклонение	1,30	4,18

При производстве массовой продукции высокое рассеивание параметров готовой продукции (массы, размеров и т. п.) может говорить о большом износе оборудования и необходимости ремонта.
Смещение средних значений параметров при низком рассеивании, как правило, устраняется регулировкой.

Вопросы

1 Что такое стандартное отклонение? Напишите формулу для вычисления стандартного отклонения.

2 Чему равно стандартное отклонение числового набора, если его дисперсия равна 4?

3 Дан массив измерений массы шоколадных плиток в граммах. В каких единицах измеряется дисперсия? В каких единицах измеряется стандартное отклонение?

4 Может ли стандартное отклонение быть отрицательным?

Задачи

318 Найдите стандартное отклонение числового набора, если его дисперсия равна:
а) 25; б) 121; в) 3,24; г) 1,69.

319 В числовом наборе 10 чисел, а стандартное отклонение равно 0. Приведите пример такого набора.

320 Найдите стандартное отклонение набора данных. Результат округлите до сотых.
а) 1, 3, 5, 1, 3;
б) 0,2, 0,4, 1,1, 1,4, 0,7;
в) 234, 432, 521, 211, 424, 233;
г) −0,21, −0,23, −1,34, −0,43, −0,34.

321 Дан набор из десяти чисел: 4, 3, 2, 1, 9, 7, 2, 7, 1, 4.
Найдите среднее и стандартное отклонения (с точностью до сотых).
а) Найдите отрезок, который получается, если отступить от среднего влево и вправо на одно стандартное отклонение.
б) Какие значения попадают в этот отрезок?
в) Какие значения расположены левее левой границы этого отрезка?
г) Какие значения расположены правее правой границы?

322 Дан набор из десяти чисел: −3, 3, −5, 7, −6, 6, −4, 3, −1, 0.
Найдите среднее и стандартное отклонения (с точностью до сотых).
а) Найдите отрезок, который получается, если отступить от среднего влево и вправо на одно стандартное отклонения.
б) Какие значения попадают в этот отрезок?
в) Какие значения расположены левее левой границы этого отрезка?
г) Какие значения расположены правее правой границы?

323 Удалите из таблицы 43 (с. 67) города Балашиху, Подольск и Верею. В примере 2 вычислено среднее и стандартное отклонение населения оставшихся городов: $\overline{x} = 67{,}7$ тыс. чел., $S = 57{,}2$ тыс. чел.
а) Будем считать подмосковный город *малым*, если его население меньше чем $\overline{x} - S$. Перечислите малые города.
б) Будем считать подмосковный город *очень крупным*, если его население больше чем $\overline{x} + 2S$. Перечислите очень крупные города. Подумайте, какие общие черты есть у этих городов.

45* Диаграммы рассеивания

Часто бывает полезно знать, есть ли некоторая связь между изучаемыми величинами и, если есть, то какова она. Разобраться в этом помогает **диаграмма рассеивания.** Покажем на примере, как её построить.

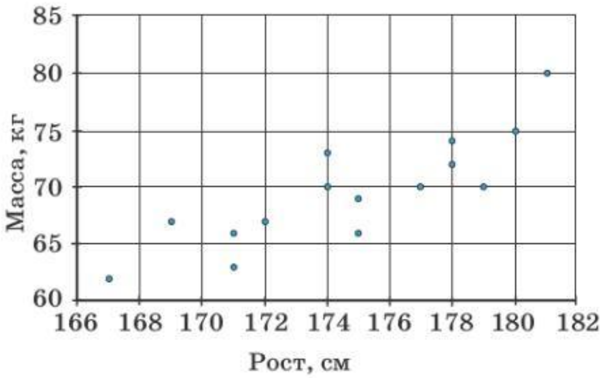
ПРИМЕР 1. Есть ли связь между ростом и массой человека? Для наглядного ответа построим диаграмму рассеивания. Данными для этой диаграммы служат пары величин. Каждая пара — это рост и масса одного человека. В таблице 58 даны значения роста и массы 15 юношей.

Таблица 58. **Рост и масса 15 юношей**

Рост, см	167	169	179	178	177	175	171	181
Масса, кг	62	67	70	72	70	69	63	80
Рост, см	174	175	180	174	172	178	171	
Масса, кг	73	66	75	70	67	74	66	

Чтобы получить диаграмму рассеивания, нужно в системе координат построить точки, абсциссы которых — рост, а ординаты — соответствующая масса. Получаем диаграмму 29.

Диаграмма 29. **Рост — масса**



Точки на диаграмме образуют **облако рассеивания**, или, более поэтично, созвездие. Видно, что на построенной диаграмме точки группируются вдоль некоторой наклонной прямой, направленной вправо и вверх.

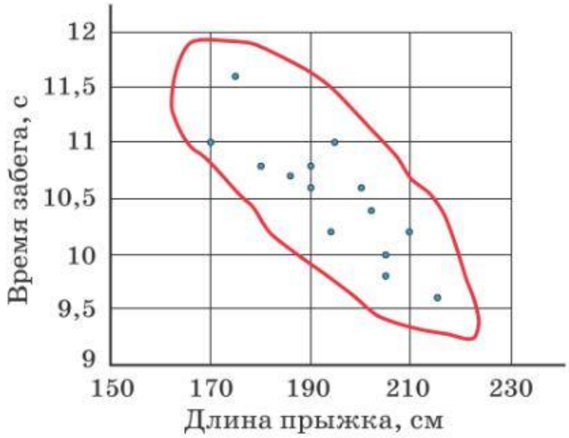
Это значит, что между величинами «рост» и «масса», скорее всего, имеется **положительная связь:** в целом чем человек выше, тем больше его масса. Разумеется, в каждом конкретном случае это правило может нарушаться. Например, в таблице 57 есть юноша ростом 179 см и массой 70 кг и юноша ростом 174 см и массой 73 кг. Но такая ситуация скорее исключение.

Диаграмма рассеивания — способ представления двух совместно наблюдаемых величин точками на координатной плоскости. Когда точек много, они образуют **облако рассеивания**.

По форме и расположению облака рассеивания можно составить наглядное представление об отсутствии или наличии связи и её характере. Чтобы лучше увидеть форму и наклон облака, можно обвести облако фломастером или карандашом.

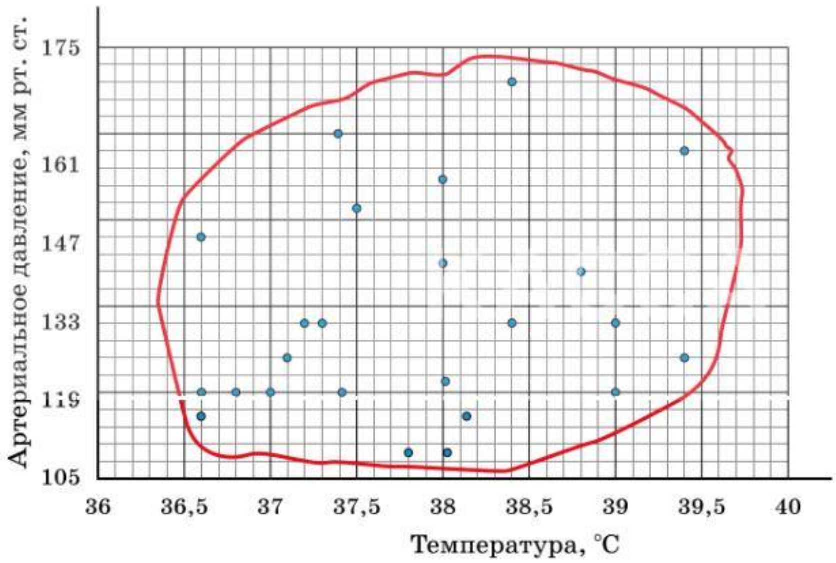
ПРИМЕР 2. На диаграмме 30 наблюдается вероятная связь между длиной прыжка и временем забега на 60 м у школьников одной и той же группы. Видно, что **связь отрицательна** — чем дальше школьник прыгает, тем меньше время забега, хотя это правило тоже иногда нарушается.

Диаграмма 30. **Длина прыжка — время забега на 60 м**



ПРИМЕР 3. Самочувствие человека во многом определяется температурой тела и артериальным давлением. По данным обследования нескольких больных построена диаграмма рассеивания (диагр. 31).

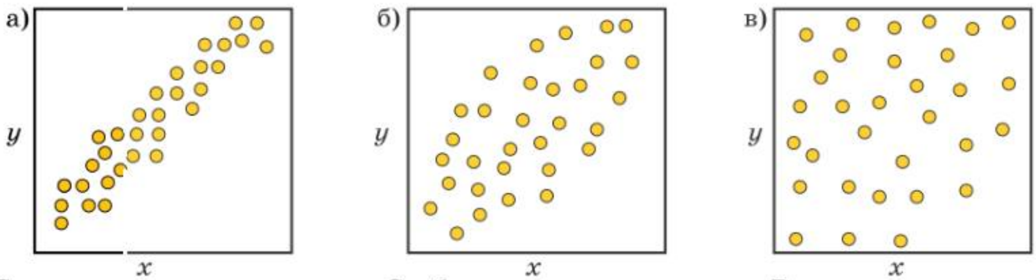
Диаграмма 31. **Температура тела — артериальное давление**



Облако рассеивания овальное, но оно вытянуто вдоль горизонтальной оси и практически не имеет наклона. Можно предположить, что связи между давлением и температурой тела нет. У человека, заболевшего ангиной или гриппом, может быть высокая температура, но это не влияет на артериальное давление.

Если облако не имеет явного наклона, то можно предположить, что связь отсутствует.

По форме облака можно не только предположить наличие связи, но и оценить её силу. Чем у́же облако, чем плотнее точки прилегают к некоторой линии, тем сильнее наблюдаемая связь. На рисунке 76 показаны три случая: сильная связь, слабая связь и вероятное отсутствие связи.



Сильная положительная связь

Слабая положительная связь

Вероятно, нет связи

Рисунок 76

ПРИМЕР 4. На диаграммах 32 и 33 показано совместное рассеивание величин «Цена нефти в долларах США за баррель» и «Курс рубля в долларах США». На диаграмме 32 представлены данные за несколько месяцев 2013 г., на диаграмме 33 — данные за несколько месяцев 2019 г. Если на первой диаграмме хорошо прослеживается положительная связь, то, судя по второй, можно предположить отсутствие связи или настолько слабую связь, что визуально её обнаружить невозможно.

Диаграмма 32. Цена нефти — курс рубля, 2013 г.

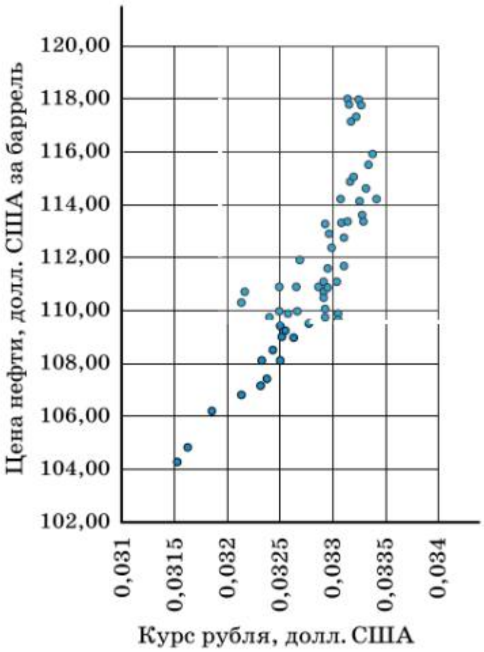


Диаграмма 33. Цена нефти — курс рубля, 2019 г.

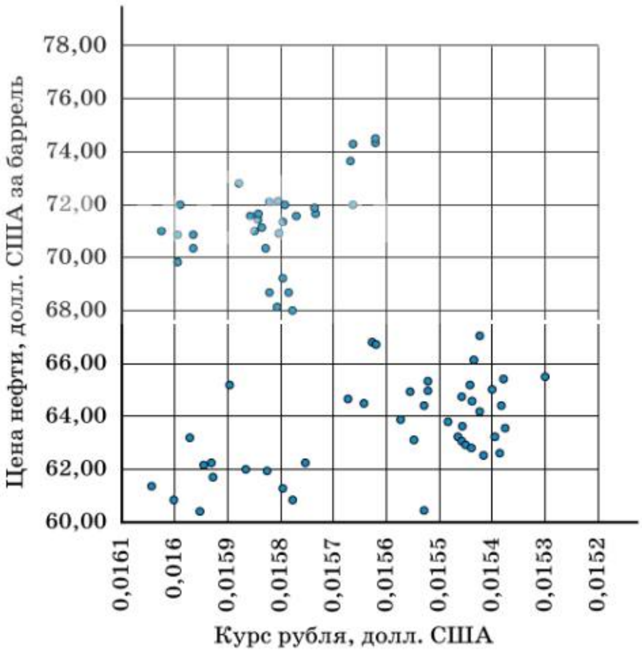


Диаграмма рассеивания — не доказательство наличия или отсутствия связи. С помощью диаграммы мы лишь можем предположить, что связь есть или что её нет. Чем больше наблюдений, тем более обоснованно предположение. Наличие связи не означает, что одна величина обусловлена другой. Наблюдаемая связь далеко не всегда причинно-следственная. Механизм связи может быть сложным. Часто обе величины зависят не друг от друга, а от каких-либо ещё факторов, которые не входят в исследование.

Например, рассматривая диаграмму 30 «Длина прыжка — время забега на 60 м», нельзя сказать, что школьник дальше прыгает потому, что быстрее бегает или наоборот. Общее физическое развитие, рост, тренированность обусловливают обе величины.

Вопросы

1 Зачем используются диаграммы рассеивания?

2 Как выглядит облако в случае положительной связи; отрицательной связи?

3 Как выглядит облако, показывающее сильную связь между двумя величинами?

4 Что можно предположить, если облако на диаграмме рассеивания вытянуто вдоль горизонтальной или вертикальной прямой?

Задачи

324 Для следующего набора пар значений постройте диаграмму рассеивания:

а) (1; 2), (2; 2), (3; 2), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (4; 3), (4; 4), (6; 6);

б) (1; 2), (2; 3), (3; 3), (3; 4), (3; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (6; 3).

Можно ли предположить положительную связь между величинами?

325 Как вы думаете, между какими величинами есть связь? Если связь есть, какой характер она может иметь: положительный или отрицательный?

а) Оценки восьмиклассника по математике и по физике.

б) Время, затраченное на компьютерные игры, и время, затраченное на выполнение домашних заданий.

в) Возраст школьника и среднее число уроков в день.

г) Площадь квартиры и количество комнат в квартире.

д) Время, которое телефон проработал с момента последней зарядки, и оставшийся заряд.

326[1] В таблице 59 приведены данные о массе и росте 12 девушек.

Таблица 59. **Рост и масса 12 девушек**

Рост, см	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Масса, кг	53	67	45	53	60	62	58	60	62	55	55	49

Постройте диаграмму рассеивания. Наблюдается ли связь между ростом и массой девушек?

[1] В задачах 326, 328, 329 удобно использовать процессор электронных таблиц для построения диаграмм рассеивания.

327 Охарактеризуйте две данные диаграммы рассеивания (диагр. 34—35), ответив на следующие вопросы:

а) Можно ли предположить наличие связи между двумя величинами?

б) Если связь есть, то положительная она или отрицательная?

в) Если связь есть, то сильная она или слабая, на ваш взгляд?

Диаграмма 34. **Широта местности — среднегодовая температура воздуха**

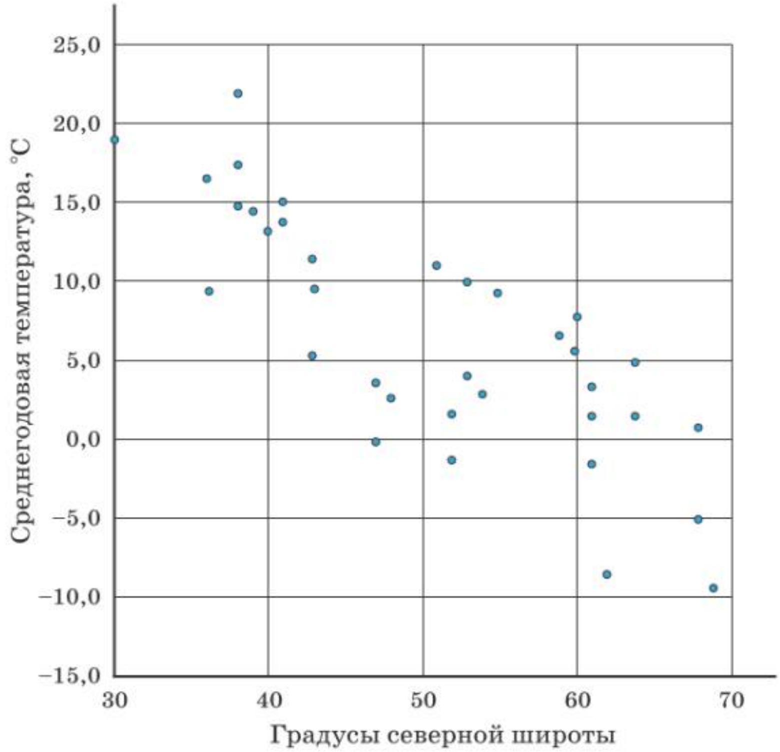
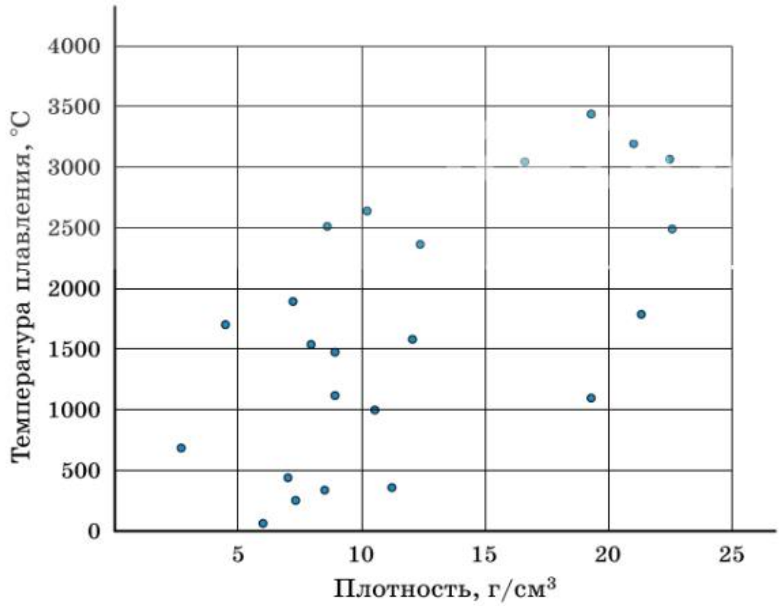


Диаграмма 35. **Плотность — температура плавления металла**



328 Фигуристы получают две оценки: за технику и за артистизм. В таблице 60 даны оценки одного судьи выступлений различных фигуристов на одном соревновании.

Таблица 60. **Оценки выступлений фигуристов**

Техника	4,3	4,5	4,5	4,8	4,9	5,2	5,4	5,0	5,5	5,8	5,7
Артистизм	4,5	4,2	4,6	4,5	5,1	5,2	5,6	5,1	5,6	5,9	5,8

Постройте диаграмму рассеивания. Наблюдается ли связь между оценками за технику и оценками за артистизм?

329 В таблице 61 приведены данные о числе голов, забитых лучшими нападающими команд премьер-лиги чемпионата России по футболу, и месте их команд в чемпионате.

Таблица 61. **Результаты лучших нападающих**

Игрок	Команда	Число голов	Место команды
Чалов Фёдор	«ЦСКА» (Москва)	15	4
Азмун Сердар	«Зенит» (Санкт-Петербург)	13	1
Классон Виктор	«Краснодар»	12	3
Дриусси Себастьян	«Зенит» (Санкт-Петербург)	11	1
Миранчук Антон	«Локомотив» (Москва)	11	2
Зе Луиш	«Спартак» (Москва)	10	5

Постройте диаграмму рассеивания. Можно ли утверждать, что чем больше голов забивают нападающие, тем выше место их команды в чемпионате?

Ответы

Глава I

3. а) 1426 тыс. чел.; б) 1105 тыс. чел. **4.** Новосибирск. **5.** 11. **6.** На 504 тыс. чел. **7.** На 119 тыс. чел. **8.** 2. **9.** 13. **10.** а) 0; б) 4; в) 9. **11.** а) 292; б) 11%. **12.** а) 13; б) 12; победителей и призёров 7%. **13.** а) 1069 млрд кВт · ч; б) в 2012 г.; в) 2019; г) например, погодные условия, переход на более экономные электроприборы, колебания объёмов производства в промышленности, строительстве и в сельском хозяйстве; д)* мировой экономический кризис вызвал снижение производства в России, и промышленность стала потреблять меньше электроэнергии. **14.** в) 26 книг; 20 570 р. **16.** г) Нижний Новгород и Самара; д) Воронеж. Возможные причины: демографическая и социальная политика властей города, появление большого количества рабочих мест. **18.** а) Баскетбольный мяч; б) ракетка. **19.** а) На ракетки; б) на сетку. **22.** *Указание.* Производство электроэнергии в 2011 г. выросло на 17 млрд кВт · ч по сравнению с 2010 г. Изменение составляет $\frac{17}{1038} \cdot 100\% \approx 1{,}6\%$. Так же вычисляются изменения в другие годы. Если производство электроэнергии в каком-то году уменьшилось по сравнению с предыдущим годом, следует вписать в таблицу отрицательную величину. **23.** а) 10 345; б) 103; в) 187 р. 44 к.; г) 1482 р. 26 к. **24.** а) Понедельник; б) четверг. **25.** 2; 4. **29.** в) 2010; г) 2019; д) 2016. **30.** ≈ 400. **31.** Грибы. **32.** а) Свердловская область; б) ≈ 25%. **34.** 2 и 4. **35.** б)* Без животных — 6; с одним животным — 6; с двумя — 18. **37.** А — Афганистан; Б — Япония; В — Исландия. **38.** а) ≈ 9 млн 095 тыс.; б) ≈ на 295 тыс. **39.** а) ≈ 645,3 млн; б) ≈ на 39,4 млн; в) ≈ на 78,7 млн.

Глава II

41. а) 9; б) 9. **42.** а) 13; 2; 1; б) 13; 2; 2. **45.** а) 15; б) 18; в) 23; г) 30; д) 26; е) 106. **48.** а) 6; б) 60; в) 600; умножением на 10 и на 100 соответственно. **49.** а) 6; б) 30; в) 150; умножением на 5 и на 25 соответственно. **50.** а) 20,74 ц/га; б) 26,08 ц/га. **51.** а) 23,41 ц/га; б) 2009, 2011, 2014 и 2015; в) 2010 и 2012. **52.** а) 78,2 тыс. чел.; б) 118,3 тыс. чел.; в) 190,0 тыс. чел.; г) 283,9 тыс. чел. **53.** а) Люберцы, Мытищи, Подольск; б) Балашиха, Подольск. *Указание.* Отвечая на вопрос в), обратите внимание на очень резкий рост населения Балашихи в 2019 г. по сравнению с 2010 г. Подумайте, чем может быть вызван такой рост населения. **54.** а) 5 и 5; б) 5 и 6; в) 6 и 6; г) 6 и 7. **57.** а) 11; б) 19; в) 28. **58.** а) 6; б) 6; в) 14. **59.** 12,125 с; Осадчий и Гостев. **60.** 73,6 млн кв. км; Индийский океан. **61.** а) На 168,3 тыс. чел.; б) 1144 тыс. чел. **62.** а) 1195,6 тыс. чел.; б) 1139 тыс. чел. **63.** а) 23,2 и 23,41 ц/га; б) 22 и 20,74 ц/га; в) 26,2 и 26,08 ц/га. **64.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет. **65.** а) 25; 3; 22; 13,5 и 13,5; б) 47; 5; 42; 23 и 19. **66.** а) Москва; б) Санкт-Петербург; в) Новосибирск и Екатеринбург. **67.** а) 135,5 млн т; 70,9 млн т; 64,6 млн т; б) 29,2 ц/га; 18,3 ц/га; 10,9 ц/га. **68.** а) 1,5 г; б) 4. **69.** а) 381°; 342,8°; 81,6°; 39,2°; б) 381°; в) 39,4°; 1,2°; 38,9°; 39,1°; г) на 341,6°; д) на 42,7°; е) на 0,05°. **70.** а), б) никак не изменится. **71.** а) Увеличится на 50; б) увеличится на 100. **72.** а) Уменьшится в 5 раз; б) увеличится в 3 раза. **73.** а) Уменьшится в 5 раз; б) увеличится в 3 раза. **74.** а) 3; б) 15. **75.** а) 9; б) –7; в) 13; г) 2. **76.** а) 16; б) 2; в) –24; г) $-\frac{8}{3}$. **77.** а) 30; б) 12; в) 39,6; г) –3,3. **78.** а) 14; б) –4; в) 23,6; г) –19,3. **79.** ≈ 0,4 долл. **80.** 58 240 р. **81.** $\frac{1}{n}$. **82.** 1,34. **83.** Увеличились на a. **84.** а) bm и bM соответственно; б) bM и bm соответственно. **85.** $\frac{n\bar{x}+a}{n+1}$. **86.** 6.

Глава III

87. 231 и 214 В. **88.** 222,2 В. **91.** 9; $\frac{9}{20}$, то есть 45%. **93.** а) $37 \leqslant m \leqslant 39$; б) $128 \leqslant m \leqslant 130$; в) $2953 \leqslant m \leqslant 2959$; г) $2540 \leqslant m \leqslant 2546$. **94.** а) $24 \leqslant v \leqslant 28$; б) $64 \leqslant v \leqslant 69$; в) $90 \leqslant v \leqslant 96$; г) $119 \leqslant v \leqslant 127$. **96.** а) 0,3; б) 0,2. **97.** а) 0,12; б) 0,12; в) 0,16; г) 0,04. **98.** 0,3. **103.** а) Балашиха, Подольск и Верея; б) 10,4, 254,7. **104.** а) 25; б) 11; г) 9; д) $\approx 0,13$. **106.** а) $\approx 5,76$ ч, то есть около 5 ч 45 мин; б) $\approx 3,72$ ч, то есть около 3 ч 43 мин. **107.** ≈ 3600. **109.** *Указание.* Подумайте, может ли случайная выборка девушек хорошо отражать рост баскетболисток. **110.** а) $\approx 2,4$%; б) 95—97%.

Глава IV

116. а) 4 ребра и 5 вершин, одна из них изолированная; б) 5 рёбер, 7 вершин, две из них изолированные. **117.** а) Да; б) нет. **122.** а) 2; б) 3. **126.** а), в), д) Да; б), г) нет. **127.** Нет. Количество вершин нечётной степени в графе знакомств чётное. **128.** 12. **130.** а) 9; б) 6. **131.** а) Да; б) нет. **132.** Например, AFB, $ADFEB$, $ACDEB$. **133.** Например, $ACDF$, $ADEF$, ACD. **134.** а) 1, 5, 8; б) 2, 4; в) 3. **135.** 3, 6, 7, 9. **138.** Нет, граф соседств не связан. **139.** Нет, граф маршрутов не связан. **140.** Нет, нельзя. С любого острова, номер которого делится на 3, можно перебраться только на острова, номера которых делятся на 3, и ни на какие другие. **141.** Да, например, 5, 7, 3, 2, 8, 4, 6, 9, 1. **142.** 1 и 3. **143.** 1, 2, 4. **146.** Нет.

Глава V

148. а) Нельзя, например, при $x = 4$ высказывание ложно; б) может, например, при $x = 10$. **149.** а) Да, например, при $x = 6,5$; б) не может. **150.** а) 7, 8, 9; б) 1, 2, 3. **151.** а) 8, 9, 10, 11; б) –1, 0, 1. **155.** а) 1; б) 1,4. **156.** а), б). **157.** а), г). **158.** а) «Число 5 не делится на 2»; б) «Прямые a и b не имеют общих точек»; в) «Юпитер не является планетой Солнечной системы». **159.** Истинны высказывания в) и г). Высказывания а) и б) ложные. Отрицаниями к ним будут высказывания «Существует значение x, которое не удовлетворяет данному уравнению» и «Существует значение x, которое удовлетворяет данному уравнению». **160.** Высказывания в) и г) — истинные, высказывания а), б), д) — ложные. **161.** Ложно только высказывание а). Отрицания: а) «Существует число, которое не является решением неравенства $x > 0$»; б) «существует положительное число, которое не является решением неравенства $x > 0$»; в) «не существует положительного решения неравенства $x > 0$». **162.** а) «При бросании игрального кубика выпало более 2 очков»; б) «при бросании игрального кубика выпала грань с 1, 4 или 6 очками». **163.** а) «Хотя бы раз выпало 4 очка»; б) «хотя бы раз не выпало 5 очков». **164.** а) «Хотя бы раз выпал орёл»; б) «хотя бы раз выпала решка». **165.** Высказывание а) ложно, остальные истинны. **166.** Например, «на каждой из двух игральных костей выпало 6 очков». **167.** Например, «на каждой из двух игральных костей выпало 1 очко». **168.** Например, «на первой из костей выпало 8 очков» или любое другое заведомо ложное высказывание. **169.** Истинны б) и г). **170.** Истинны б) и г). **171.** б) и в). **173.** а) $D \to A$ (истинное) и $A \to D$; б) $B \to C$ (истинное) и $C \to B$. **174.** а) Например, $A \to C$ и $C \to A$; б) например, $D \to A$ и $A \to D$; в) например, $E \to C$ и $C \to E$. **175.** Равносильны утверждения A, B и D; равносильны утверждения C и E. **178.** Да. **179.** *Указание.* Воспользуйтесь методом от противного. Предположите, что получить 100 кусков при каком-то очередном разрывании куска газеты удалось. Тогда сколько кусков было после предыдущего разрывания? А перед этим? Рассуждая так и дальше, придите к противоречию. **181.** а) 1;

б) 0. **182.** *Указание.* Воспользуйтесь методом от противного. Если ошибки нет, то какая цифра зашифрована буквой В?

Глава VI

183. в) — достоверное событие; а), г) — невозможные. **184.** в) — достоверное событие; а), б) — невозможные. **187.** а) Нет; б) да; в) нет. **192.** Да, означает.

Глава VII

194. а) {0, 1, 2, 3, 4}; б) {11, 13, 17, 19}; в) {сентябрь, октябрь, ноябрь}. **195.** б) и в). **196.** {О, Р}, {Р}, {О} и ∅. **197.** Да, $B \subset A$. **199.** а), б), в) и е). **201.** а) (1; 3), (2; 2) и (3; 1); б) (1; 3), (2; 3), (3; 3), (3; 2), (3; 1). **202.** а) $P \subset A$, $P \subset D$; б) $P \subset B$, $P \subset C$. **203.** а) $C \cap D = \{o, q\}$; б) $C \cup D = \{a, d, o, p, t, q\}$. **204.** а) (−3; 7]; б) (−2; 4]. **207.** а) Неверно; б) верно. **208.** Философов больше. **209.** На 7. **210.** а) $2 < x \leqslant 3$; б) $x > 8$; в) $-3 \leqslant x \leqslant 1{,}5$; г) $5{,}7 \leqslant x < 9$. **212.** а) $[-3; 1] \cup [3; 6]$; б) $[-4; 0] \cup [2; +\infty)$; в) $[-2; 0] \cup [4; 5]$. **213.** а) [4; 6) и (0; 7]; б) ∅ и $(-5; 2) \cup (3; 7)$; в) (−2; 1] и [−4; 5); г) [5; 7] и $(-\infty; +\infty)$. **214.** а) [4; 6) и $(-\infty; +\infty)$; б) ∅ и $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$. **215.** а) Да; б) необязательно; в) да; г) да. **216.** [3; 7]. **217.** ∅. **218.** [3; 5). **219.** $(-\infty; -2) \cup (0; 3] \cup (4; +\infty)$. **220.** 88. **221.** 40. **222.** 144. **223.** 160. **224.** а) 500; б) 625. **225.** а) 90; б) 170. **226.** а) 90; б) 90; в) 9000; г) 9000. **228.** 40 320. **229.** а) 120; б) 24. **230.** 126.

Глава VIII

231. События B и C невозможные, события A и D достоверные. **232.** Событие B невозможное, события A и C достоверные. **233.** Два способа: (Андрей, Борис) и (Борис, Андрей). **234.** 9. **235.** 6: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА. **237.** Четыре элементарных события: ОО, ОР, РО, РР. **238.** ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР. **239.** а) В 2 раза; б) 16; в) 1024. **240.** Бесконечное число элементарных событий: О, РО, РРО и т. д. **241.** а) ММ, МФМ, МФФ, ФФ, ФМФ, ФММ; б) МФФ, ФФ, ФМФ, в) М; г) 3. **242.** а) Нет; б) только буквой c; в) c, ac, bc, abc и bac. **243.** 216. **244.** а) 1; б) 3; в) 0. **245.** а) 1; б) 4; в) 10. **246.** Да. **249.** а) 0,4; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,89; г)* 0,2. **250.** $\frac{1}{6}$. **251.** а) 0,04; б) $\frac{1}{17}$; в) 0,01. **252.** а) 3; б) 10; в) 8; г) k. **253.** а) Во втором; б) в первом; в) вероятности равны. **254.** Равновозможны; вероятность 0,25. **255.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$; в)* $\frac{1}{1024}$. **257.** ЗЗЗ, ЗЗС, ЗСЗ, ЗСС, СЗЗ, СЗС, ССЗ, ССС; 0,125. **258.** $\frac{1}{27}$. **259.** События равновозможны, поскольку кость симметричная; а) $\frac{1}{216}$; б) $\frac{1}{1296}$. **260.** а) $A = \{2, 4, 6\}$; б) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; в) $A = \{3, 4, 5, 6\}$; г) $A = \{2, 3, 4, 5\}$. **261.** а) Например, «при первом броске выпал орёл»; б) например, «во второй раз выпала не та сторона, что в первый»; в) например, «решка выпала хотя бы один раз»; г) например, «оба раза выпала одна и та же сторона». **262.** Андреев выиграл; ничья. **265.** Элементарным событием является результат всех пяти выстрелов. Например, «попал, промахнулся, попал, попал, попал»; а) 5; б) 5. **266.** а) {ОР, РО}; б) {ОР, РР}; в) {ОР, РО, РР}; г) {ОР, ОО}. **267.** а) {ОРР, РОР, РРО}; б) {ООР, ОРО, РОО}; в) {ОРО, ОРР, РРО, РРР}; г) {ООО, ОРО, РОО, РРО}. **268.** Например, каждый исход можно записывать тремя буквами. Первая буква (*а*, *б* или *в*) означает, какое мороженое купил Константин, вторая — Леонид, третья — Михаил. Исход *ббв* означает, что Константин с Леонидом купили брусничное мороженое, а Михаил — вишнёвое. а) {*aaa*, *aaб*, *aaв*, *aбa*, *aбб*, *aбв*, *aвa*, *aвб*, *aвв*}; б) {*aaa*, *aaб*, *aaв*, *aвa*, *aвб*, *aвв*, *бaa*, *бaб*, *бaв*, *бвa*, *бвб*, *бвв*, *вaa*, *вaб*, *вaв*, *ввa*, *ввб*, *ввв*}; в) {*aaa*, *aaв*, *aбa*, *aбв*, *aвa*, *aвв*, *бaa*, *бaв*, *ббa*, *ббв*, *бвa*, *бвв*, *вaa*, *вaв*, *вбa*, *вбв*, *ввa*, *ввв*}; г) {*aaa*, *aaб*, *aaв*, *бaa*, *бaб*, *бaв*, *вaa*, *вaб*, *вaв*}. **269.** а) Например, «стрелок сделает от двух до четырёх выстрелов»; б) например, «потребуется не больше пяти выстрелов»; в) например, «потребуется не меньше трёх выстрелов»; г) например, «потребуется нечётное количество выстрелов». **270.** 48. **271.** а) 0,5; б) 0,6; в) 0,9; г) 0,3. **272.** а) 0,6; б) 0,7; в) 0,3. **273.** 0,2. **274.** 0,4. **275.** 0,4. **276.** 0,48. **277.** 0,65. **278.** 0,47. **279.** 0,55. **280.** а) 0,75; б) 0,5. **281.** а) $\frac{5}{36}$; б) $\frac{13}{18}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{1}{9}$. **282.** а) 0,013; б) 0,763; в) 0,249; г) 0,644. **283.** 0,17. **284.** $P(a) = 0{,}1$, $P(b) = 0{,}3$, $P(c) = 0{,}6$. **285.** а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$; в) 0,5; г) 0. **286.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{3}$. **287.** Нет; в первом случае вероятность 0,25, а во втором 0,5. **288.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{18}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{2}{3}$. **289.** а) $\frac{13}{24}$; б) $\frac{19}{24}$; в) $\frac{11}{24}$; г) $\frac{19}{24}$. **290.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{4}{9}$. **291.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) 0,5. **292.** а) $\frac{7}{20}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{4}$. **293.** $\frac{1}{3}$. **294.** а) $\frac{7}{64}$; б) $\frac{7}{64}$; в) $\frac{11}{64}$; г) $\frac{9}{64}$; д) $\frac{13}{64}$. **295.** $\frac{1}{3}$. **296.** а) 0,04; б) 0,06; в) 0,2; г) 0,8. **297.** а) 0,25; б) 0,375; в) 0,375. **298.** а) 0; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{1}{7}$; д) $\frac{4}{7}$; в поле e8. **299.** а) 0,4; б) 0,2. **300.** 0,6.

Глава IX

301. а) Одинаковые; б) больше у второго; в) одинаковые. **302.** Больше у первого. **304.** а) 0,9; б) 0,6. **305.** а) −0,5, −3,5, 1,5, 2,5, −0,5, 0,5; б) −4,38, 1,22, 3,42, −3,18, 2,92. **306.** а) −57; б) 4,37. **307.** а) Нет, поскольку их сумма должна быть равна нулю; б) нет по той же причине; в) да, если все числа в наборе одинаковы. **308.** а) 6; б) 10. **309.** а) 2,2, 1,8, 0,2, 1,8, 1,2; б) 2,4, 1,5, 0,7, 1,6. **310.** а) 6 и 2; б) 12 и 2 или 11 и 3. **313.** а) $\frac{14}{3}$ и $\frac{2}{3}$; б) 3,5 и 6,5. **314.** 0,86. **315.** а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3}$ — дисперсии равны; б) 5 и 5 — дисперсии равны. **316.** Для Анны: среднее равно 1,7, дисперсия приближённо равна 1,28. Для Инны: среднее равно 1, дисперсия равна $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$. Средний результат Анны выше, результаты Инны стабильнее. **317.** 172,0 см; 40,97 см^2. **318.** а) 5; б) 11; в) 1,8; г) 1,3. **320.** а) 1,50; б) 0,44; в) 120,81; г) 0,42. **321.** а) [1,35; 6,65]; б) 2, 3 и 4; в) 1; г) 7 и 9. **322.** а) [−4,36; 4,26]; б) −4, −3, −1, 0, 3; в) −6 и −5; г) 6 и 7. **323.** а) Высоковск (не считая Вереи); б) Люберцы, Мытищи, Королёв и Химки (не считая Балашихи и Подольска); общей чертой можно считать то, что все эти города вплотную примыкают к Москве, являясь частью Московской агломерации. **327.** а) Вероятно, есть отрицательная не очень сильная связь; б) вероятно, есть положительная слабая связь.

Оглавление

Предисловие 3

Глава I. Представление данных 5
1. Таблицы 6
2. Упорядочивание данных и поиск информации 8
3. Подсчёты и вычисления в таблицах 11
4. Столбиковые диаграммы 18
5. Круговые диаграммы 22
6*. Возрастно-половые диаграммы 27

Глава II. Описательная статистика 31
7. Среднее арифметическое 32
8. Медиана 36
9. Наименьшее и наибольшее значения. Размах 40
10*. Обозначения в статистике. Свойства среднего арифметического 44

Глава III. Случайная изменчивость 47
11. Примеры случайной изменчивости 48
12. Точность и погрешность измерений 50
13. Тенденции и случайные отклонения 53
14. Частоты значений в массивах данных 58
15. Группировка данных и гистограммы 62
16. Выборка 69
17*. Статистическая устойчивость и оценки с помощью выборки 72

Глава IV. Графы 77
18. Графы. Вершины и рёбра 78
19. Степень вершины 83
20. Пути в графе. Связные графы 86
21*. Задача о Кёнигсбергских мостах, эйлеровы пути и эйлеровы графы 89

Глава V. Логические утверждения и высказывания 93
22. Утверждения и высказывания 94
23. Отрицание 97
24. Условные утверждения 99
25. Обратные и равносильные утверждения. Признаки и свойства. Необходимые и достаточные условия 101
26*. Противоположные утверждения. Доказательство от противного 104

Глава VI. Случайные опыты и случайные события 107
27. Примеры случайных опытов и случайных событий 108
28. Вероятности и частоты событий 109
29. Монета и игральная кость в теории вероятностей 112
30. Как узнать вероятность события 114
31. Вероятностная защита информации от ошибок 117

Глава VII. Множества 121
32. Множество, подмножество, примеры множеств 122
33. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера 125
34*. Множества решений неравенств и систем 129
35*. Правило умножения 130

Глава VIII. Математическое описание случайных явлений 135
36. Случайные опыты и элементарные события 136
37. Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события 139
38. Благоприятствующие элементарные события 143
39. Вероятности событий 146
40. Опыты с равновозможными элементарными событиями 149
41. Случайный выбор 153

Глава IX. Рассеивание данных 155
42. Рассеивание числовых данных и отклонения 156
43. Дисперсия числового набора 160
44*. Стандартное отклонение числового набора 164
45*. Диаграммы рассеивания 167

Ответы 173